

Упрощенная математическая модель

синхронного двигателя с возбуждением постоянными магнитами

Для синхронного двигателя с постоянными магнитами на роторе выведены дифференциальные уравнения, в которых учитываются главные факторы, определяющие свойства машины, — зависимость электромагнитных процессов и вращающего момента от скорости и углового положения ротора

Анатолий Коршунов, д. т. н.

a.i.korshunov@mail.ru

Введение

Благодаря своим высоким эксплуатационным характеристикам синхронный двигатель (СД) с постоянными магнитами на роторе является перспективной электрической машиной для приводов малой и средней мощности: от стиральной машины до металлорежущего станка и электровоза [1]. Отсутствие обмотки возбуждения и успокоительной обмотки несколько упрощает процессы в СД и их описание.

Однако, как известно, сложность явлений, происходящих в электрических машинах переменного тока при переходных процессах, делает их математическое описание и исследование без ряда упрощающих допущений практически невозможным [2]. Стремление учесть главные факторы, определяющие свойства машины, и пренебречь второстепенными факторами приводит к рассмотрению идеализированной электрической машины. Такая машина характеризуется:

- отсутствием насыщения, гистерезиса и вихревых токов в магнитной цепи;
- отсутствием вытеснения тока в проводниках обмоток;
- синусоидальным распределением в воздушном зазоре магнитодвижущей силы и магнитной индукции;
- полной симметрией обмоток статора;
- независимостью индуктивностей рассеяния обмоток статора от положения ротора.

Обычно идеализируют и источник питания, считая его выходное сопротивление нулевым, а ЭДС — образующими трехфазную симметричную систему.

Имея конечной целью использование математической модели синхронного двигателя (СД) в анализе и синтезе замкнутых частотно управляемых электроприводов (ЭП), желательно получить наиболее простую и удобную модель. Для этого примем дополнительные упрощающие допущения. Учитывая необходимое для защиты силовых ключей автономно инвертора ограничение тока СД, будем считать, что статорная обмотка питается от трехфазного генератора тока. При наличии в ЭП контура регули-

рования тока это допущение весьма близко к реальности и позволяет рассматривать электромеханические процессы независимо от электромагнитных процессов. Кроме этого, пренебрежем индуктивностью рассеяния обмоток статора СД и учтем отсутствие успокоительной обмотки.

Учитывая очень большую коэрцитивную силу современных редкоземельных магнитов (Nd-Fe-B или Sm-Co), будем считать индукцию магнитного поля, создаваемого постоянными магнитами ротора в зазоре СД, неизменной.

Электромагнитный вращающий момент СД

Рассмотрим поперечное сечение СД с одной парой полюсов ($2p = 2$), представленное на рис. 1. Буквами AX, BY, CZ обозначены секторы фазных обмоток статора. Фазовые токи образуют трехфазную симметричную систему:

$$\begin{aligned} i_A(t) &= I_m \cos \omega t, & i_B(t) &= I_m \cos [\omega t - (2\pi/3)], \\ i_C(t) &= I_m \cos [\omega t - (4\pi/3)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Направления токов указаны для момента $t = 0$. Ось магнитного поля статора совпадает с осью обмотки

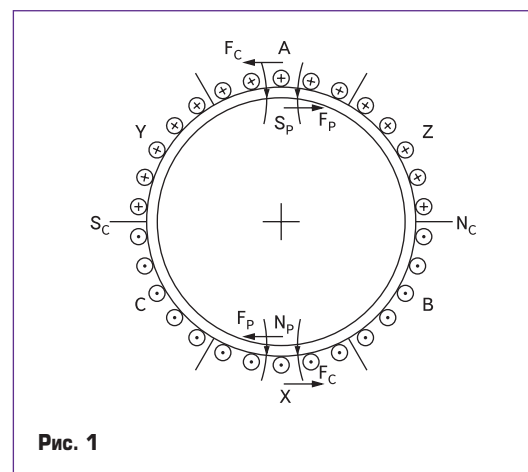


Рис. 1

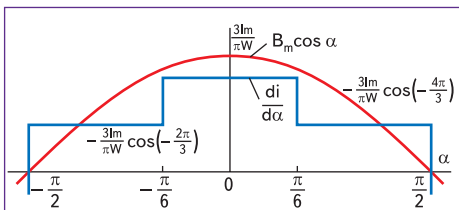


Рис. 2

фазы А, причем направление силовых линий поля соответствует указанным на рис. 1 магнитным полюсам статора N_c и S_c . Нетрудно понять из рис. 1 и формул (1), что поле статора вращается по часовой стрелке.

Для определения амплитуды электромагнитного вращающего момента СД положим, что в момент $t = 0$ ось поля ротора совпадает с плоскостью обмотки фазы А (то есть перпендикулярна к оси обмотки), а направление его силовых линий соответствует показанному на рис. 1 полюсам поля ротора: N_p и S_p .

По закону Ампера, на проводники обмотки статора действуют силы, направленные согласно правилу левой руки в сторону, противоположную направлению вращения поля статора. Таким образом, на статор СД со стороны его ротора действует вращающий момент, направленный против направления вращения поля статора.

Согласно третьему закону Ньютона, точно такой же вращающий момент действует со стороны статора СД на его ротор, но направленный он в противоположную сторону, то есть в сторону вращения поля статора.

Для вычисления вращающего момента примем, что ток статорной обмотки не сосредоточен в ее проводниках, а распределен вдоль окружности статора, как показано на рис. 2. Плотность тока в секторах фаз А, В и С определяется выражением:

$$(di/da)_j = \pm(3i_j W/\pi), j = a, b, c, \quad (2)$$

где i_j — мгновенное значение фазного тока, W — число витков фазовой обмотки, α — относительная длина дуги окружности в радианах, $i_A = -i_x = I_m$, $i_B = -i_y = I_m \cos[-(2\pi/3)]$, $i_C = -i_z = I_m \cos[-(4\pi/3)]$. Элементарный момент dM , создаваемый элементарным током статора $di = (di/da) da$, определяется выражением

$$dM_{эм} = B(\alpha)(di/da) R l d\alpha, \quad (3)$$

где $B(\alpha)$ — индукция в данной точке воздушного зазора, R — расстояние от оси машины до проводников статора, l — длина активной части ротора.

Отсчитывая α от плоскости обмотки фазы А в направлении вращения поля, можно записать выражение для величины вращающего момента

$$M_{эм} = -2Rl \frac{3}{\pi} W I_m B_m \left\{ \cos(\varphi + \frac{\pi}{3}) \int_{-\pi/2}^{-\pi/6} \cos(\alpha - \vartheta) d\alpha + \cos \varphi \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos(\alpha - \vartheta) d\alpha + \cos(\varphi - \frac{\pi}{3}) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos(\alpha - \vartheta) d\alpha \right\} = \frac{9}{\pi} B_m I_m W R l \cos(\varphi - \vartheta) = M_m \cos(\varphi - \vartheta) \quad (8)$$

$$M_{эм} = \int dM_{эм} = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B(\alpha) \left(\frac{di}{da} \right) R l d\alpha = 2Rl \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{di}{da} \right) B(\alpha) d\alpha.$$

Выполняя интегрирование по фазным секторам обмотки, на которых плотность тока статора постоянна, с учетом

$$B(\alpha) = B_m \cos \alpha, \quad (5)$$

где B_m — амплитуда магнитной индукции, создаваемой в зазоре полюсами ротора, получаем

$$M_{эм} = M_m = 2Rl \frac{3}{\pi} W I_m B_m \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{-\pi/6} \cos \alpha d\alpha + \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos \alpha d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \right\} = \frac{9}{\pi} B_m I_m W R l.$$

Рассмотрим далее общий случай, когда в момент $t = 0$ токи в фазах имеют значения

$$i_A = I_m \cos \varphi, i_B = I_m \cos[\varphi - (2\pi/3)], i_C = I_m \cos[\varphi - (4\pi/3)], \quad (7)$$

что означает поворот поля статора на угол φ в направлении его вращения ($\varphi > 0$). Ротор сместим на угол ϑ в том же направлении ($\vartheta > 0$). В этом случае полюсы статора и ротора сдвинуты уже не на $\pi/2$, как на рис. 1, а на угол, равный $\pi/2 + \varphi - \vartheta$.

На рис. 3 представлены законы изменения плотности тока статора в относительных единицах (то есть без множителя $(3I_m W)/\pi$ и магнитной индукции, создаваемой ротором в воздушном зазоре СД). Аналогично предыдущему определяется вращающий электромагнитный момент двигателя, что с учетом (6) дает (8).

где $M_m = (9/\pi) B_m W R l I_m = C_m I_m$, $C_m = (9/\pi) W B_m R l$.

При смещении точки отсчета угла поворота ротора на $\pi/2$ в сторону вращения поля статора, то есть отсчитывая ϑ от оси обмотки фа-

зы А, в выражение (8) следует подставить $\vartheta + (\pi/2)$, что дает

$$M_{эм} = M_m \cos(\varphi - \vartheta - (\pi/2)) = M_m \sin(\varphi - \vartheta), \quad (9)$$

где $\varphi - \vartheta$ — угловое смещение оси полюса ротора $S_p(N_p)$ относительно оси полюса статора $N_c(S_c)$, отсчитываемое от S_p до N_c в направлении вращения поля. Очевидно, что при отставании поля ротора от поля статора на угол до 180° на ротор действует вращающий момент, а при опережении на такой же угол — тормозящий момент. При совпадении осей полюсов S_p и N_c (S_c и N_p) электромагнитный момент равен нулю. Как известно, вращающий и тормозящий моменты обращаются в нуль и при $\varphi - \vartheta = \pm\pi$, что в случае одной пары полюсов соответствует одному и тому же положению ротора относительно статора. Однако это положение неустойчиво, поскольку любое отклонение от него вызывает увеличение отклонения под действием тормозящего или разгоняющего момента. Разумеется, приведенные рассуждения относятся к случаю отсутствия момента нагрузки.

ЭДС, наводимая постоянными магнитами вращающегося ротора в обмотке статора СД

При вращении ротора в каждом проводнике обмотки наводится ЭДС вращения

$$e_i = B_i l v, \quad (10)$$

где B_i — магнитная индукция, создаваемая ротором в месте i -го проводника обмотки, v — линейная скорость проводника относительно поля ротора.

Мгновенное значение полной ЭДС, наводимой в проводнике фазовой обмотки, равно сумме ЭДС, наводимых в данный момент в каждом проводнике обмотки.

Определим положение ротора углом ϑ между плоскостью обмотки фазы А и осью S полюса ротора, отсчитываемым в направлении вращения поля. Распределение магнитной индукции в зазоре у сектора фазы А обмотки статора можно описать выражением

$$B(\alpha) = B_m \cos(\alpha - \vartheta), \quad (11)$$

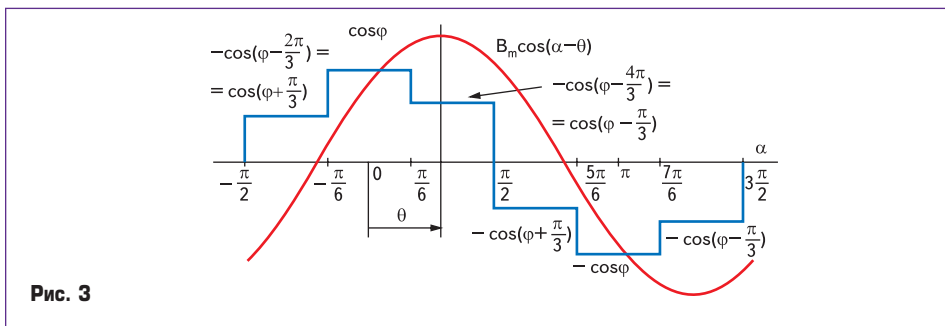


Рис. 3

где α — угол, отсчитываемый от плоскости обмотки фазы А в направлении вращения поля статора.

Полагая угловое расстояние между соседними проводниками обмотки (рис. 1) равным

$$\Delta\alpha = \pi / 3W, \quad (12)$$

получаем величину суммарной ЭДС в фазе А:

$$e_A = 2 \sum_{i=0}^{W-1} B_m l V \cos(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{\Delta\alpha}{2} - i\Delta\alpha) = 2B_m l V \sum_{i=0}^{W-1} \cos(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{\Delta\alpha}{2} - i\Delta\alpha) \quad (13)$$

Множитель 2 перед суммой объясняется суммированием ЭДС проводников только в одном секторе фазной обмотки.

Ряд косинусов легко сворачивается, если воспользоваться формулой Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha, \quad j = \sqrt{-1}, \quad \text{или } \cos\alpha = \operatorname{Re}(e^{j\alpha}). \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в ряд (13), получаем с учетом $\Delta\alpha \ll 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{W-1} \cos(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{\Delta\alpha}{2} - i\Delta\alpha) &= \operatorname{Re} e^{j(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{\Delta\alpha}{2})} \sum_{i=0}^{W-1} e^{-ji\Delta\alpha} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{\Delta\alpha}{2})} \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-j\Delta\alpha}} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ e^{j\vartheta} \frac{e^{j\frac{\pi}{6}} - e^{-j\frac{\pi}{6}}}{e^{j\Delta\alpha/2} - e^{-j\Delta\alpha/2}} \right\} = \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}} \operatorname{Re} e^{j\vartheta} \approx \frac{1}{2} \frac{2 \times 3W}{\pi} \cos\vartheta = \\ &= \frac{3W}{\pi} \cos\vartheta. \end{aligned} \quad (15)$$

Подстановка полученного результата (15) в формулу (13) дает

$$e_A = (\pi/6) W B_m l v \cos\vartheta. \quad (16)$$

Выразив линейную скорость v через угловую ($d\vartheta/dt$), что дает

$$v = R (d\vartheta/dt), \quad (17)$$

получаем

$$e_A = (6/\pi) W B_m l R (d\vartheta/dt) \cos\vartheta = e_c (d\vartheta/dt) \cos\vartheta, \quad (18)$$

где $e_c = (6/\pi) W B_m l R = (2/3) C_m$

С учетом пространственного сдвига фазных обмоток статора СД имеем

$$e_B = \frac{d\vartheta}{dt} \cos(\vartheta - 2\pi/3), \quad (19)$$

$$e_C = \frac{d\vartheta}{dt} \cos(\vartheta - 4\pi/3).$$

Для определения направления e_A рассмотрим рис. 1 при $\vartheta = 0$. При вращении ротора в сторону вращения поля статора, то есть по часовой стрелке (ч. с.), проводники ротора вращаются относительно поля статора в противоположную сторону, то есть против ч. с. Согласно правилу правой руки, e_A направлена в сторону, противоположную указанному на рис. 1 направлению тока фазы А, совпадающему с выбранным положительным направлением тока в этой фазе статорной обмотки СД. По симметрии направим ЭДС остальных фаз: e_B и e_C противоположно соответствующим фазным токам i_B и i_C .

Учитывая симметрию фазовых обмоток и угол сдвига между их осями $2\pi/3$, можно считать взаимоиндуктивности одинаковыми и равными $-M$.

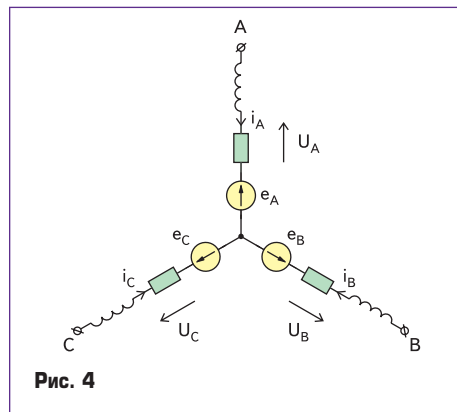


Рис. 4

Уравнения электрического равновесия для фазовых обмоток статора СД (рис. 4) имеют вид

$$\begin{cases} L \frac{di_A}{dt} + ri_A - M \frac{di_B}{dt} - M \frac{di_C}{dt} = u_A - e_A, \\ L \frac{di_B}{dt} + ri_B - M \frac{di_A}{dt} - M \frac{di_C}{dt} = u_B - e_B, \\ L \frac{di_C}{dt} + ri_C - M \frac{di_B}{dt} - M \frac{di_A}{dt} = u_C - e_C, \end{cases} \quad (20)$$

где L и r — индуктивность и активное сопротивление фазы статора, u_A, u_B, u_C — фазные напряжения.

Установившийся режим работы СД

Положим электромагнитный момент СД равным постоянному моменту нагрузки:

$$M_m \sin(\varphi(t) - \vartheta(t)) = M_H = \text{const}, \quad \varphi(t) = \omega t, \quad (21)$$

а фазные токи — определенными формулами (1).

Из выражения (21) получаем

$$\vartheta(t) = \omega t - \vartheta_0, \quad (22)$$

где $\vartheta_0 = \arcsin(M_H / M_m), -\pi/2 < \vartheta_0 < \pi/2$.

Учитывая, что в выражениях (18), (19) угол поворота ротора отсчитывается от плоскости обмотки фазы А, а в формуле (22) — от оси этой обмотки, подстановкой в эти выражения $\vartheta + \pi/2$ вместо ϑ , а также

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_p, \quad (23)$$

где ω_p — скорость вращения ротора, равная в установившемся режиме скорости вращения поля статора ($\omega_p = \omega$), получаем

$$e_A = -C_e \omega_p \sin\vartheta, \quad e_B = -C_e \omega_p \sin[\vartheta - (2\pi/3)], \quad e_C = -C_e \omega_p \sin[\vartheta - (4\pi/3)]. \quad (24)$$

Подставив выражения (1), (22) и (24) в систему уравнений (20), находим фазовые напряжения

$$\begin{cases} u_A = -\omega(L+M)I_m \sin\omega t + rI_m \cos\omega t - E_m \sin(\omega t - \vartheta_0), \\ u_B = -\omega(L+M)I_m \sin[\omega t - (2\pi/3)] + rI_m \cos[\omega t - (2\pi/3)] - E_m \sin[\omega t - (2\pi/3) - \vartheta_0], \\ u_C = -\omega(L+M)I_m \sin[\omega t - (4\pi/3)] + rI_m \cos[\omega t - (4\pi/3)] - E_m \sin[\omega t - (4\pi/3) - \vartheta_0], \end{cases} \quad (25)$$

где $E_m = C_e \omega$ — амплитуда ЭДС вращения.

Переписав первое из уравнений системы (25) с помощью элементарных тригонометрических преобразований в виде:

$$u_A = \omega(L+M)I_m \cos[\omega t + (\pi/2)] + rI_m \cos\omega t + E_m \cos[\omega t - \vartheta_0 + (\pi/2)], \quad (26)$$

легко построить векторную диаграмму для фазового напряжения, представленную на рис. 5. Из выражения (26) и рис. 5 следует, что фаза ЭДС вращения относительно фазового тока равна $\pi/2 - \vartheta_0$, где ϑ_0 — угол отставания ротора от вращающегося поля статора. Следовательно, на векторной диаграмме (см. рис. 5) положение вектора E_m определяет угол ϑ_0 , отсчитываемый от направления, перпендикулярного вектору тока I_m , по часовой стрелке.

Из рис. 5 очевидно, что уменьшение отставания поля ротора от поля статора ϑ_0 , необходимое при неизменных фазовых токах в случае уменьшения момента нагрузки M_H , требует увеличения фазных напряжений. Поэтому рациональнее уменьшать фазные токи при сохранении ϑ_0 , близким к $\pi/2$. Это обеспечит меньшие фазные напряжения и меньший сдвиг по фазе между током и напряжением φ (рис. 5) и, следовательно, высокий коэффициент мощности $\cos\varphi$.

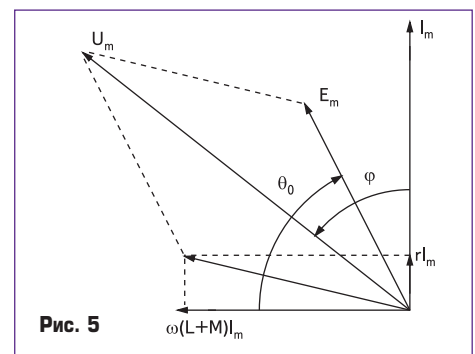


Рис. 5

Для проверки баланса мощностей умножим фазовое напряжение $u_A(\omega t)$ на ток $i_A(\omega t)$ и вычислим среднюю мощность фазы А, что дает:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_A(\omega t) i_A(\omega t) d\omega t = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [-\omega(L+M)I_m^2 \sin \omega t \cos \omega t + \\ & \quad + I_m^2 r \cos^2 \omega t - \\ & \quad - E_m I_m \sin(\omega t - \vartheta_0) \cos \omega t] d\omega t = \\ & = \frac{1}{2} (I_m^2 r + E_m I_m \sin \vartheta_0) = P_A \end{aligned} \quad (27)$$

Суммируя мощности трех фаз, получаем потребляемую СД электрическую мощность:

$$P_\Sigma = 3P_A = 3I_m^2 r + (3/2) E_m I_m \sin \vartheta_0, \quad I = I_m / \sqrt{2}. \quad (28)$$

Отдаваемая механическая мощность с учетом формул (6), (18), (21), (22) определяется выражением:

$$\begin{aligned} P_M &= M_n \omega = M_m \omega \sin \vartheta_0 = \\ &= (9/\pi) B_m I_m W R \omega \sin \vartheta_0 = \\ &= (3/2)(6/\pi) W B_m R I_m \omega \sin \vartheta_0 = \\ &= (3/2) E_m I_m \sin \vartheta_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Из сравнения выражений (28) и (29) следует, что потребляемая СД электрическая мощность превышает отдаваемую механическую мощность на величину потерь в активном сопротивлении обмотки статора. Это при принятых допущениях соответствует закону сохранения энергии.

Дифференциальные уравнения СД, управляемого от источника напряжения

При управлении от источника напряжения даже при наличии контуров регулирования фазных токов в переходных режимах условие (1) может не выполняться, что следует учитывать.

$$\begin{aligned} M_{эм} &= 2RIB_m \frac{3W}{\pi} \left\{ -i_B \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(\alpha - \vartheta) d\alpha + i_A \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(\alpha - \vartheta) d\alpha - i_C \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha - \vartheta) d\alpha \right\} = \frac{\pi}{6} RIWB_m \times \\ & \times \left\{ -i_B \left[-\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \right] + i_A \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} - \vartheta\right) + \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) \right] - i_C \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \vartheta\right) \right] \right\} = \\ & = \frac{6}{\pi} RIWB_m \left[-i_B \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) + i_A \cos \vartheta - i_C \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{3}\right) \right] = C_e \left[-i_B \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) + i_A \cos \vartheta - i_C \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{3}\right) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{cases} L_\Sigma \frac{di_A}{dt} + ri_A = \frac{E}{6} \left[2sat \frac{K_p(I_{3A} - i_A)}{\delta_m} - sat \frac{K_p(I_{3B} - i_B)}{\delta_m} - sat \frac{K_p(I_{3C} - i_C)}{\delta_m} \right] + C_e \frac{d\vartheta}{dt} \sin \vartheta, \\ L_\Sigma \frac{di_B}{dt} + ri_B = \frac{E}{6} \left[-sat \frac{K_p(I_{3A} - i_A)}{\delta_m} + 2sat \frac{K_p(I_{3B} - i_B)}{\delta_m} - sat \frac{K_p(I_{3C} - i_C)}{\delta_m} \right] + C_e \frac{d\vartheta}{dt} \sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right), \\ L_\Sigma \frac{di_C}{dt} + ri_C = \frac{E}{6} \left[-sat \frac{K_p(I_{3A} - i_A)}{\delta_m} - sat \frac{K_p(I_{3B} - i_B)}{\delta_m} + 2sat \frac{K_p(I_{3C} - i_C)}{\delta_m} \right] + C_e \frac{d\vartheta}{dt} \sin\left(\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right), \\ J \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = C_e (-i_A \sin \vartheta + i_B \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) + i_C \sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{3}\right)) - M_n, \end{cases} \quad (34)$$

Положим известными мгновенные значения токов в фазах обмотки статора: i_A, i_B и i_C и угол сдвига оси поля ротора относительно плоскости обмотки фазы А статора ϑ , отсчитываемый в направлении вращения поля статора.

Подставляя в формулу (4) значения плотностей тока в секторах фаз (2):

$$\begin{aligned} \frac{di_A}{d\alpha} &= \frac{3i_A W}{\pi}, \\ \frac{di_B}{d\alpha} &= -\frac{3i_B W}{\pi}, \\ \frac{di_C}{d\alpha} &= -\frac{3i_C W}{\pi}, \end{aligned}$$

с учетом закона изменения индукции в зазоре (11) (рис. 6):

$$B(\alpha) = B_m \cos(\alpha - \vartheta)$$

получаем (см. ниже для $M_{эм}$).

Можно получить выражение для $M_{эм}$ в другом виде, используя формулу (8). Для этого представим мгновенные значения токов фаз СД в виде (7):

$$i_A = I_m \cos \varphi, \quad i_B = I_m \cos[\varphi - (2\pi/3)], \quad i_C = I_m \cos[\varphi - (4\pi/3)].$$

Очевидно, система уравнений не противоречит первому уравнению Кирхгофа для статорных обмоток СД, соединенных звездой (рис. 4).

$$i_A + i_B + i_C = 0. \quad (31)$$

Представив второе уравнение системы (7) в виде:

$$\begin{aligned} i_B &= -\frac{1}{2} I_m \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} I_m \sin \varphi = \\ &= -\frac{1}{2} i_A + \frac{\sqrt{3}}{2} I_m \sin \varphi \end{aligned}$$

и решив его совместно с первым уравнением, получаем

$$I_m = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{i_A^2 + i_A i_B + i_B^2}, \quad (32)$$

$$\varphi = \begin{cases} \bar{\varphi}, i_A > 0, i_A + 2i_B > 0, \\ \bar{\varphi} - \pi, i_A < 0, i_A + 2i_B < 0, \end{cases} \quad (33)$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, i_A = 0, i_B = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, i_A = 0, i_B < 0, \end{cases}$$

$$\bar{\varphi} = \text{Arctg} \frac{i_A + 2i_B}{\sqrt{3}i_A},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \bar{\varphi} \leq \frac{\pi}{2} \text{ — главное значение угла.}$$

Из полученных формул следует, что любые токи статора СД, удовлетворяющие условию (31), можно рассматривать как мгновенные значения трехфазной системы токов (7), амплитуды которых определяются формулой (32), а текущая фаза — формулой (33). Подставляя I_m и φ в формулу (8), получаем мгновенное значение $M_{эм}$.

Воспользовавшись дифференциальными уравнениями непрерывной модели автономного инвертора, работающего на статорную обмотку СД [2], и используя уравнения электромагнитного момента (30) и ЭДС вращения (18, 19), получаем систему дифференциальных уравнений электрического и механического равновесия (34), где $L_\Sigma = L + M, I_{3j}, j = A, B, C$ — заданные значения фазных токов, K_p — коэффициент усиления пропорциональных регуляторов фазных токов, L, M и r — индуктивность, модуль взаимоиндуктивности и активное сопротивление фазных обмоток статора, E — напряжение питания инвертора, δ_m — граница линейной зоны широтно-им-

пульсных модуляторов (ШИМ), управляющих ключами инвертора, $\text{sat}(x)$ — функция насыщения, J — приведенный к ротору СД суммарный момент инерции двигателя и его нагрузки, M_n — момент нагрузки, в общем случае зависящий от угла поворота ротора СД ϑ и его скорости $d\vartheta/dt$, ϑ отсчитывается от оси обмотки фазы А до оси полюса S ротора.

В линейной зоне широтно-импульсного модулятора система уравнений электрического равновесия допускает декомпозицию и полная система (32) имеет вид (35).

Уравнения (34) и (35) получены в предположении одной пары полюсов у СД ($2p = 2$). В случае большего числа пар полюсов угол ϑ измеряется в электрических радианах: $\vartheta_{эл} = p\vartheta$. В этом случае можно сохранить уравнения неизменными, полагая в них ϑ измеряемым в электрических радианах, но несколько изменив значения коэффициентов в дифференциальных уравнениях. Коэффициент C_e в первых трех уравнениях следует разделить на число пар полюсов p , а суммарный момент

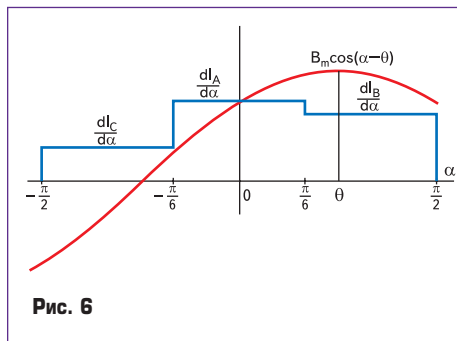


Рис. 6

инерции J в последнем уравнении следует разделить на p , оставив без изменения C_e в его правой части.

Экспериментальное определение параметров СД с постоянными магнитами технически проще выполнить в генераторном режиме, особенно при значительной его мощности. Это позволяет обойтись без мощного источника переменного напряжения регулируемой частоты и напряжения [4], а также снимает проблему нагрузки двигателя. Из опыта хо-

$$\left\{ \begin{aligned} (L + M) \frac{di_A}{dt} + \left(r + \frac{K_p E}{2\delta_m}\right) i_A &= \frac{K_p E}{2\delta_m} I_{\alpha A} + C_e \frac{d\vartheta}{dt} \sin \vartheta, \\ (L + M) \frac{di_B}{dt} + \left(r + \frac{K_p E}{2\delta_m}\right) i_B &= \frac{K_p E}{2\delta_m} I_{\alpha B} + C_e \frac{d\vartheta}{dt} \sin \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right), \\ (L + M) \frac{di_C}{dt} + \left(r + \frac{K_p E}{2\delta_m}\right) i_C &= \frac{K_p E}{2\delta_m} I_{\alpha C} + C_e \frac{d\vartheta}{dt} \sin \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right), \\ J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} &= C_e \left(-i_A \sin \vartheta + i_B \sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) + i_C \sin \left(\vartheta - \frac{\pi}{3}\right)\right) - M_n. \end{aligned} \right. \quad (35)$$

лостного хода легко определить значение C_e , а из опыта короткого замыкания — значение L_{Σ} . Величину активного сопротивления фазной обмотки статора r можно измерить непосредственно, например, методом амперметра и вольтметра.

Выводы

Учет только основных особенностей синхронного двигателя с постоянными магнитами, определяющих его свойства, позволил получить относительно простые дифференциальные уравнения электромагнитных и механических процессов в нем.

Литература

1. Панкратов В. Вентильный электропривод: от стиральной машины до металлорежущего станка и электровоза // Электронные компоненты. 2007. № 2.
2. Сипайлов Г. А., Кононенко Е. В., Хорьков К. А. Электрические машины (специальный курс). Высшая школа, М.: 1987.
3. Коршунов А. И. Непрерывная модель трехфазного контура регулирования тока синхронного двигателя с постоянными магнитами на роторе // Силовая электроника. 2007. № 4.
4. Дробкин Б. З., Карзунов Р. А., Крутяков Е. А., Павлов П. А., Пронин М. В. Высоковольтные тиристорные преобразователи частоты ОАО «Электросила» // Электротехника. 2003. № 5.