

# Управление током статора синхронного двигателя

## с возбуждением постоянными магнитами при частотном пуске

Анатолий Коршунов,  
д. т. н.

A.I.Korshunov@mail.ru

В статье рассмотрен контур регулирования тока статора синхронного двигателя с постоянными магнитами, получено условие устойчивости этого контура и исследована точность поддержания заданного тока с учетом ЭДС вращения, наводимой в обмотке статора.

### Введение

В предыдущей статье автора [1] был рассмотрен частотный пуск синхронного двигателя (СД) с возбуждением постоянными магнитами при синусоидальных токах статора с неизменной амплитудой. Как известно, на ток статора оказывают существенное влияние многие факторы, например, увеличение ЭДС вращения и сопротивления обмоток вследствие повышения частоты при пуске СД, изменение величины прикладываемого напряжения. Следовательно, для поддержания тока статора неизменным необходимы специальные меры.

В электроприводе постоянного тока, построенном по принципу подчиненного управления, задачу ограничения тока и поддержания его на этом уровне в переходных режимах успешно решает контур регулирования тока. Поэтому логично использовать его и в электроприводе переменного тока. Поскольку при частотном управлении двигателями переменного тока используют обычно трехфазный автономный инвертор (АИН), построенный на транзисторах типа MOSFET или IGBT, весьма чувствительных к перегрузке по току, требования к динамическим свойствам регулятора тока статора достаточно высоки. С другой стороны, весьма жесткими оказываются и требования к ослаблению влияния возмущающих воздействий на величину тока. Как известно, при жестких требованиях к качеству управления возможно нежелательное проявление свойств широтно-импульсного управления инвертором, например,

недопустимых субгармонических автоколебаний. Таким образом, необходим учет и этого фактора.

### 1. Математическое описание силовой части трехфазного контура регулирования тока

Рассмотрим АИН, нагруженный на обмотку статора СД, соединенную звездой (рис. 1) при следующих допущениях:

- в силу симметрии трехфазной обмотки статора  $r_a = r_b = r_c = r$ ,  $L_a = L_b = L_c = L$ ,  $M_{ab} = M_{ba} = M_{ac} = M_{ca} = M_{bc} = M_{cb} = -M$ ;
- транзисторы инвертора считаем идеальными ключами;
- в любой момент времени включены три ключа — по одному из каждого плеча;
- ЭДС вращения  $e_a, e_b, e_c$  наводимые в обмотке статора вращающимся ротором, образуют трехфазную симметричную систему.

Принятые допущения позволяют записать систему уравнений электрического равновесия: (1) (2) (3). Упрощения в двух последних уравнениях дают

$$(L + M) \frac{di_a}{dt} - (L + M) \frac{di_b}{dt} +$$

$$+ r(i_a - i_b) = u_{ab} - e_a - e_b,$$

$$(L + M) \frac{di_b}{dt} - (L + M) \frac{di_c}{dt} +$$

$$+ r(i_b - i_c) = u_{bc} - e_b + e_c.$$

Подставляя в уравнение (5) ток  $i_c$ , выраженный из уравнения (1), и складывая с удвоенным уравнением (4), получаем

$$3(L + M) \frac{di_a}{dt} + 3ri_a = 2u_{ab} + u_{bc} - 2e_a + e_b + e_c. \tag{6}$$

$$\begin{cases} i_a + i_b + i_c = 0, & (1) \\ L \frac{di_a}{dt} - M \frac{di_b}{dt} - M \frac{di_c}{dt} + ri_a - L \frac{di_b}{dt} + M \frac{di_a}{dt} + M \frac{di_c}{dt} - ri_b = u_{ab} - e_a + e_b, & (2) \\ L \frac{di_b}{dt} - M \frac{di_a}{dt} - M \frac{di_c}{dt} + ri_b - L \frac{di_c}{dt} + M \frac{di_a}{dt} + M \frac{di_b}{dt} - ri_c = u_{bc} - e_b - e_c. & (3) \end{cases}$$

С учетом равенств

$$e_a + e_b + e_c = 0, u_{ab} + u_{bc} + u_{ca} = 0, \quad (7)$$

первое из которых вытекает из трехфазной симметрии ЭДС вращения, а второе записано по второму закону Кирхгофа для внешнего контура статорных обмоток СД, уравнение (6) приводится к виду

$$(L + M)(di_a/dt) + ri_a = (1/3)(u_{ab} - u_{ca}) - e_a. \quad (8)$$

По симметрии можно записать следующие два уравнения

$$(L + M)(di_b/dt) + ri_b = (1/3)(u_{bc} - u_{ab}) - e_b. \quad (9)$$

$$(L + M)(di_c/dt) + ri_c = (1/3)(u_{ca} - u_{bc}) - e_c. \quad (10)$$

Разумеется, любое из уравнений (8, 9, 10) является следствием двух других, поскольку из трех внутренних контуров статора СД независимы только два.

## 2. Построение регулятора фазных токов статора

Состояние ключей в каждом плече инвертора (рис. 1) будем изменять только один раз в течение периода коммутации  $T$ . Длительность проводимости верхнего ключа обозначим  $\tau_{1j}$ , а нижнего —  $\tau_{2j}$ , где  $i = a, b, c$ . Очевидно,

$$\tau_{1i} + \tau_{2i} = T, \quad i = a, b, c.$$

Применение разрабатываемых в последнее время алгоритмов векторной широтно-импульсной модуляции (ШИМ) в трехфазном АИН [2, 3], обладающих определенными преимуществами для инверторов напряжения, в рассматриваемом случае нерационально. Причина этого — сложность реализации и применение законов коммутации ключей АИН, использующих более трех (4 или 6) переключений за период коммутации. При регулировании тока гораздо проще и рациональнее изменять длительности включения транзисторных ключей АИН не программным способом, как при векторной ШИМ, а в зависимости от ошибок управления регуляторов фазных токов. Вместо рекомендуемого числа переключений за период коммутации, равного 4 или 6, лучше увеличить частоту коммутации в 4/3 или в 2 раза.

При  $\tau_1 = \tau_2 = T/2$  в каждом плече АИН линейные напряжения статорной обмотки  $u_{ab}$ ,  $u_{bc}$ ,  $u_{ca}$  равны нулю, поскольку все три конца статорной обмотки (a, b и c) подключены к одной точке. В течение первой половины периода они соединены с «+» источника питания, а в оставшийся полупериод — с его «-».

Изменение  $\tau_1$  и  $\tau_2$  только в одном плече моста, например, связанном с фазой a, вызывает изменение сразу двух линейных напряжений статорной обмотки:  $u_{ab}$  и  $u_{ca}$ . При этом очевидно, что

$$u_{ab} = -u_{ca} = E[1(t-T/2) - 1(t-\tau_1)], u_{bc} = 0, \quad (11)$$

где  $1(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $1(t) = 1$  при  $t > 0$  — единичная функция.

В случае  $\tau_{1a} > T/2$   $u_{ab}$  представляет собой положительный прямоугольный импульс, а при  $\tau_{1a} < T/2$  — отрицательный. С учетом (11) в правых частях дифференциальных уравнений (8–10) получаем соответственно

$$\begin{aligned} 1/3(u_{ab} - u_{ca}) &= 2E[1(t-T/2) - 1(t-\tau_{1a})]/3, \\ 1/3(u_{bc} - u_{ab}) &= -E[1(t-T/2) - 1(t-\tau_{1a})]/3, \\ 1/3(u_{ca} - u_{bc}) &= -E[1(t-T/2) - 1(t-\tau_{1a})]/3. \end{aligned} \quad (12)$$

Из выражений (12) очевидно, что увеличение времени подключения одной из фаз обмотки статора к «+» источника питания ( $\tau_{1j} > T/2$ ) приводит не только к появлению положительного импульса в правой части дифференциального уравнения для тока этой фазы, но и к отрицательным импульсам вдвое меньшей амплитуды в правых частях дифференциальных уравнений для токов двух других фаз. При ( $\tau_{1j} < T/2$ ) полярности всех трех упомянутых выше импульсов изменяются на противоположную. Меняется и положение импульсов на временной оси. В первом случае ( $\tau_{1j} > T/2$ ) они начинаются в середине периода, а во втором ( $\tau_{1j} < T/2$ ) в середине периода заканчиваются.

Таким образом, для увеличения тока в  $j$ -й фазе обмотки статора следует увеличивать  $\tau_{1j}$  (уменьшать  $\tau_{2j}$ ) в  $j$ -м плече инвертора, а для уменьшения тока (с учетом его знака) следует уменьшать  $\tau_{1j}$  (увеличивать  $\tau_{2j}$ ).

Следовательно, регулятор тока должен в случае положительной ошибки управления, увеличивать  $\tau_{1j}$ , а при отрицательной ошибке — уменьшать  $\tau_{1j}$ .

$$\delta_j = I_{3j} - i_j, \quad j = a, b, c, \quad (13)$$

где  $I_{3j}$  и  $i_j$  — заданное и действительное значение тока.

Очевидно, что для надежного ограничения токов транзисторных ключей АИН в переходных режимах регулятор тока не должен быть слишком инерционным. В простейшем случае регулятор может быть пропорциональным.

Из изложенного выше ясно, что регуляторы не будут независимы, поскольку увеличение тока в одной фазе вызывает уменьшение токов в двух других фазах. Это взаимное влияние в общем случае нежелательно. Действительно, полагая равными ошибки управления всех трех контуров регулирования

$$\delta_a = \delta_b = \delta_c \quad (14)$$

и учитывая вытекающее из этого равенство

$$\tau_{1a} = \tau_{1b} = \tau_{1c} \quad (15)$$

получаем из схемы силовой части рис. 1

$$u_{ab} = u_{bc} = u_{ca} = 0$$

Таким образом, равные ошибки управления в контурах регулирования тока нарушают процесс регулирования токов статора СД.

Однако в рассматриваемом случае заданные токи:  $I_{3a}(t)$ ,  $I_{3b}(t)$ ,  $I_{3c}(t)$  образуют симметричную трехфазную систему. Вследствие этого с учетом тождества (1) получаем

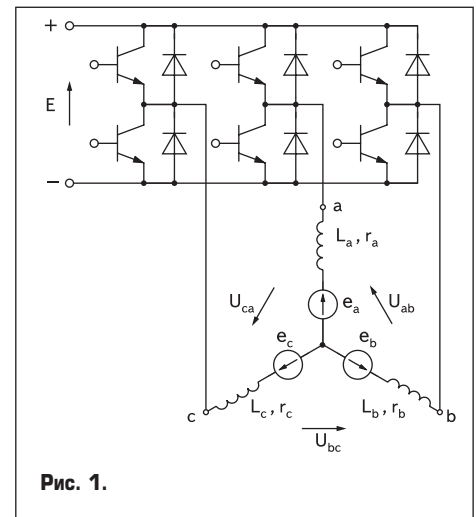


Рис. 1.

$$\delta_a(t) + \delta_b(t) + \delta_c(t) = I_{3a}(t) + I_{3b}(t) + I_{3c}(t) - [i_a(t) + i_b(t) + i_c(t)] = 0. \quad (16)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае ошибки управления в контурах регулирования тока могут быть равными между собой только в случае равенства каждой из них нулю.

## 3. Разностные уравнения трехфазного регулятора тока при пропорциональных регуляторах и их анализ

Разностное уравнение необходимо для анализа устойчивости контура с учетом нелинейного дискретного характера управления и для определения ошибок управления.

А. Вначале для простоты положим  $r = 0$ , и будем считать постоянными ЭДС вращения

$$e_j = \text{const}, \quad j = a, b, c, \quad (17)$$

а также и заданные значения токов

$$I_{3j} = \text{const}, \quad j = a, b, c \quad (18)$$

Допущения (17) и (18) тем более верны, чем ниже частота заданных токов и чем быстрее протекают электромагнитные переходные процессы по сравнению с механическими.

Пренебрегая дискретностью значений ошибок управления, вычисляемых в микропроцессоре, определяемой ограниченной разрядной сеткой, будем полагать

$$\tau_{1jm} = (1 + \text{sat}(K_p \delta_{jm} / \delta_m)) T/2, \quad j = a, b, c, \quad (19)$$

где  $\tau_{1jm}$  — значение  $\tau_{1j}$  в  $n$ -ом периоде коммутации,

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ \text{sign}(x), & |x| > 1, \end{cases}$$

функция насыщения,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

функция знака,

$\delta_m$  — граница линейной зоны широтно-импульсного модулятора,  $K_p$  — коэффициент усиления пропорционального регулятора.

В линейной зоне ШИМ, то есть при

$$|\delta_{jn}| < \delta_m / K_p, \quad j = a, b, c \quad (20)$$

выполняется условие

$$0 < \tau_{1jn} < T, \quad j = a, b, c. \quad (21)$$

Для определенности положим

$$0 < \tau_{1an} < \tau_{1bn} < \tau_{1cn} < T. \quad (22)$$

Это позволяет построить временные диаграммы линейных напряжений:  $u_{ab}(t)$ ,  $u_{bc}(t)$  и  $u_{ca}(t)$  (рис. 2) и определить импульсы напряжения в правых частях уравнений (8–10) в  $n$ -ом периоде коммутации:

$$nT < t < (n+1)T$$

Структура полученных выражений позволяет предположить, что и при других соотношениях между  $\tau_{1an}$ ,  $\tau_{1bn}$ ,  $\tau_{1cn}$  отличных от принятых (22), выражения импульсов (23) останутся неизменными. Это утверждение несложно проверить.

Интегрирование уравнений (8–10) с учетом принятых допущений дает выражения (24).

В полученных разностных уравнениях значения  $\tau_{1jn}$ ,  $j = a, b, c$  определяются уравнением модуляции (19).

Очевидно, разностные уравнения (24) сохраняют силу и вне линейной зоны ШИМ, когда хотя бы при одном значении  $j$

$$|\delta_{jn}| > \delta_m / K_p, \quad j = a, b, c. \quad (25)$$

При выполнении же условия (20) контур регулирования тока можно описать системой линейных разностных уравнений

$$\begin{cases} \delta_{a\ n+1} = \delta_{an} - \beta(2\delta_{an} - \delta_{bn} - \delta_{cn}) - \gamma e_a \\ \delta_{b\ n+1} = \delta_{bn} - \beta(2\delta_{bn} - \delta_{an} - \delta_{cn}) - \gamma e_b \\ \delta_{c\ n+1} = \delta_{cn} - \beta(2\delta_{cn} - \delta_{an} - \delta_{bn}) - \gamma e_c \end{cases} \quad (26)$$

где  $\beta = EK_p T / [6(L + M)\delta_m]$ ,  $\gamma = T / (L + M)$ .

С учетом тождества (16) система разностных уравнений (26) распадается на три независимых разностных уравнения

$$\delta_{j\ n+1} = \alpha \delta_{jn} + \gamma e_j, \quad j = a, b, c, \quad (27)$$

где  $\alpha = 1 - 3\beta = 1 - EK_p T / [2\delta_m(L + M)]$ .

Установившееся решение уравнений (27) имеет вид

$$\delta_{j\infty} = K_e e_j, \quad j = a, b, c \quad (28)$$

$$\begin{cases} u_{ab} - u_{ca} = E[-1(\tau - \tau_{1an}) + 1(\tau - \tau_{1bn}) - 1(\tau - \tau_{1an}) + 1(\tau - \tau_{1cn})] = E[-2\tau(\tau - \tau_{1an}) + 1(\tau - \tau_{1bn}) + 1(\tau - \tau_{1cn})], \\ u_{bc} - u_{ab} = E[-1(\tau - \tau_{1bn}) + 1(\tau - \tau_{1cn}) + 1(\tau - \tau_{1an}) - 1(\tau - \tau_{1bn})] = E[1(\tau - \tau_{1an}) - 2\tau(\tau - \tau_{1bn}) + 1(\tau - \tau_{1cn})], \\ u_{ca} - u_{bc} = E[1(\tau - \tau_{1an}) - 1(\tau - \tau_{1cn}) + 1(\tau - \tau_{1bn}) - 1(\tau - \tau_{1cn})] = E[1(\tau - \tau_{1an}) + 1(\tau - \tau_{1bn}) - 2\tau(\tau - \tau_{1cn})], \end{cases} \quad (23)$$

где  $\tau = t - nT$ .

$$\begin{cases} i_a((n+1)T) = i_a(nT) + \{E[-2(T - \tau_{1an}) + T - \tau_{1bn} - T - \tau_{1cn}]/3 - e_a T\} / (L + M) = \\ = i_{an} + E[2\tau_{1an} - \tau_{1bn} - \tau_{1cn}] / 3(L + M) - e_a T / (L + M), \\ i_b((n+1)T) = i_b(nT) + E[2\tau_{1bn} - \tau_{1an} - \tau_{1cn}] / 3(L + M) - e_b T / (L + M), \\ i_c((n+1)T) = i_c(nT) + E[2\tau_{1cn} - \tau_{1an} - \tau_{1bn}] / 3(L + M) - e_c T / (L + M). \end{cases} \quad (24)$$

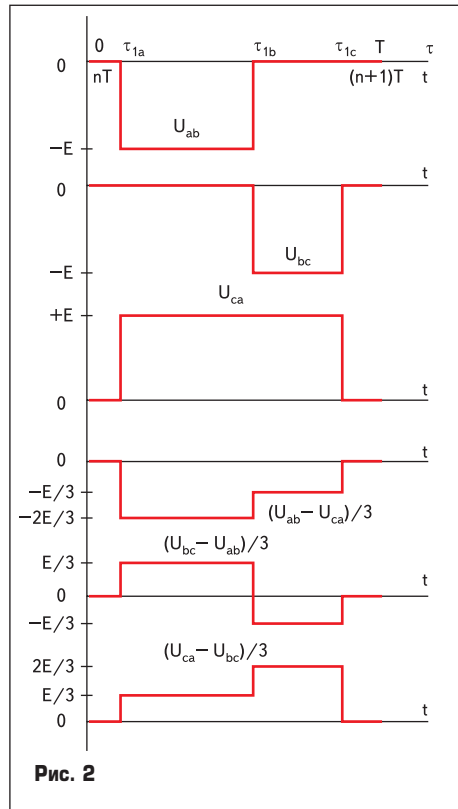


Рис. 2

$$\text{где } K_e = \gamma / 3\beta = 2\delta_m / (K_p E). \quad (29)$$

Решения (28) разностных уравнений (27) устанавливаются только при их асимптотической устойчивости. Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$|\alpha| = |1 - 3\beta| < 1. \quad (30)$$

Несложно проверить, что неравенство (30) ограничивает коэффициент усиления регулятора тока условием

$$0 < K_p < 4(L + M)\delta_m / (ET). \quad (31)$$

Заметим, что  $0 < \alpha < 1$  соответствует монотонному затуханию переходного процесса установления  $\delta_{j\infty}$ , а  $-1 < \alpha < 0$  – колебательному с частотой вдвое меньшей частоты коммутации. Особое место занимает значение  $\alpha = 0$ , при котором переходный процесс в пределах линейной зоны ШИМ заканчивается за 1 период коммутации. Поэтому рационально с точки зрения быстродействия выбирать соответствующее значение  $K_p$

$$K_p = 2[(L + M)\delta_m] / (ET). \quad (32)$$

Последнее значение  $K_p$  обеспечивает двукратный запас устойчивости контура регулирования тока, что следует из (31) и (32).

Величина установившейся ошибки при выборе  $K_p$  из условия максимального быстродействия в линейной зоне ШИМ (32) имеет значение

$$\delta_{jm} = [T / (L + M)] e_j, \quad j = a, b, c. \quad (33)$$

Из последнего выражения видно, что уменьшение периода коммутации при сохранении двукратного запаса устойчивости позволяет пропорционально уменьшать ошибки управления контура регулирования тока, вызываемые ЭДС вращения, наводимыми в статорной обмотке.

Разумеется, формула (33) справедлива в случае значения установившихся ошибок управления, удовлетворяющих условию линейности ШИМ (20)

$$|\delta_j| = [T / (L + M)] |e_j| < \delta_m / K_p.$$

Из последнего выражения с учетом (32) получаем минимально необходимую величину напряжения питания инвертора

$$E > 2 e_m, \quad (4)$$

где  $e_m$  – амплитуда ЭДС, наводимой полюсами вращающегося ротора в фазовых обмотках статора.

Согласно (33) при постоянном задающем воздействии (18) установившаяся ошибка вызвана только возмущающим воздействием (17). Причина этого в допущении о равенстве нулю активного сопротивления статорной обмотки и нулевом падении напряжения, создаваемом постоянным током на индуктивности.

При изменяющемся задающем воздействии неизбежна составляющая ошибки управления, создающая на чисто индуктивной нагрузке напряжение, необходимое для изменения тока в ней. Кроме того, в действительности и возмущающее воздействие не удовлетворяет условию (17).

Б. Учет гармоническое изменение задающего воздействия

$$I_{zj}(t) = I_{zm} \sin(\Omega t - \varphi_j), \quad j = a, b, c, \quad (35)$$

где  $\varphi_a = 0$ ,  $\varphi_b = 2\pi/3$ ,  $\varphi_c = 4\pi/3$ , и возмущающего воздействия

$$e_j = E_m \sin(\Omega t - \varphi_j + \theta), \quad j = a, b, c. \quad (36)$$

Поскольку при пуске СД скорость повышения частоты напряжения на его статорных обмотках ограничена механической инерционностью СД и его нагрузки, при анализе значительно более быстрых электромагнитных переходных процессов в контуре регулирования тока можно считать  $\Omega = const$ .

Интегрирование уравнений (8–10) дает при  $r = 0$  выражения (37): см. далее.

Полагая работу контура регулирования тока в линейной зоне ШИМ (20), с учетом очевидных выражений

$$i_{jk} = I_{sj}(kT) - \delta_j(kT), k = n, n + 1 \quad (38)$$

систему разностных уравнений (37) несложно привести к виду

$$\delta_{jn+1} = \alpha \delta_{jn} + 2\sin(\Omega T/2) \{ I_{3m} \cos(\Omega nT - \varphi_j + \Omega T/2) + E_m \sin(\Omega nT - \varphi_j + \theta + \Omega T/2) / [\Omega(L + M)] \}, j = a, b, c, \quad (39)$$

Линейные разностные уравнения (39) имеют две составляющие установившихся решений, то есть

$$\delta_{j\infty}(nT) = \delta_{3j\infty}(nT) + \delta_{ej\infty}(nT), j = a, b, c. \quad (40)$$

Первая составляющая  $\delta_{3j\infty}(nT)$  вызвана изменением задающих воздействий (35), а вторая —  $\delta_{ej\infty}(nT)$  — возмущающими воздействиями (36).

При выборе  $K_p$  согласно (32), что обеспечивает окончание переходных процессов при работе в линейной зоне ШИМ в первом периоде коммутации, из (39) легко получить

$$\delta_{3j\infty}(nT) = \delta_{3m} \cos(\Omega nT - \varphi_j - \Omega T/2), \quad (41)$$

$$\text{где } \delta_{3m} = 2\sin(\Omega T/2) I_{3m}, \quad (42)$$

$$\delta_{ej\infty}(nT) = \delta_{em} \sin(\Omega nT - \varphi_j + \theta - \Omega T/2), \quad (43)$$

$$\text{где } \delta_{em} = 2\sin(\Omega T/2) E_m / [\Omega(L + M)]. \quad (44)$$

Из формул (41–44) очевидно, что при  $\Omega T$ , стремящемся к нулю, ( $\Omega T \rightarrow 0$ ) ошибки, вызванные изменением задающего воздействия, обращаются в 0, а ошибки, вызванные возмущающими воздействиями, стремятся к значениям, определяемым формулой (33), в которой  $e_j = -E_m \sin(\varphi_j + \theta)$ ,  $j = a, b, c$ . Таким образом, предыдущий результат представляет собой частный случай последнего.

Напряжение питания инвертора, необходимое для работы контура регулирования тока в линейной зоне ШИМ, определим для наиболее тяжелого режима, в котором ошибки  $\delta_{3j\infty}(nT)$  и  $\delta_{ej\infty}(nT)$  совпадают по фазе. Для этого случая необходимо выполнить неравенство

$$\delta_m < K_p \times 2\sin(\Omega T/2) \{ I_{3m} + E_m / [\Omega(L + M)] \},$$

что с учетом (32) дает

$$E > (2/T) \sin(\Omega T/2) [2(L + M) I_{3m} + 2E_m / \Omega] \approx 2[\Omega(L + M) I_{3m} + E_m]. \quad (45)$$

Учитывая рост ЭДС вращения при разгоне СД, требуемое напряжение питания АИН оказывается наибольшим в конце разгона. Его минимальное допустимое значение согласно (45) равно удвоенной сумме амплитуд ЭДС

$$\begin{cases} i_a((n+1)T) = i_a(nT) + E[2\tau_{1a} - \tau_{1b} - \tau_{1c}] / [3(L + M)] - [2E_m / (\Omega(L + M))] \sin(\Omega T/2) \sin(\Omega T + \theta + \Omega T/2) \\ i_b((n+1)T) = i_b(nT) + E[2\tau_{1b} - \tau_{1a} - \tau_{1c}] / [3(L + M)] - [2E_m / (\Omega(L + M))] \sin(\Omega T/2) \sin(\Omega T - 2\pi/3 + \theta + \Omega T/2) \\ i_c((n+1)T) = i_c(nT) + E[2\tau_{1c} - \tau_{1a} - \tau_{1b}] / [3(L + M)] - [2E_m / (\Omega(L + M))] \sin(\Omega T/2) \sin(\Omega T - 4\pi/3 + \theta + \Omega T/2) \end{cases} \quad (37)$$

вращения и падения напряжения на индуктивном сопротивлении фазы статорной обмотки СД.

#### 4. Учет влияния активного сопротивления статорных обмоток

Интегрирование дифференциальных уравнений (8–10) при  $r \neq 0$  и гармонических ЭДС вращения  $e_j(t)$  (36) для известных значений  $\tau_{1j}$ ,  $j = a, b, c$  дает

$$i_j((n+1)T) = e^{-T/T_c} [i_j(nT) + (E/r)(e^{\tau_{1jn}/T_c} - \sigma(nT)/3)] - E_m [r^2 + \Omega^2(L + M)^2]^{-1/2} [\sin(\Omega(n+1)T - \varphi_j + \theta - \varphi) - e^{-T/T_c} \sin(\Omega nT - \varphi_j + \theta - \varphi)], \quad (46)$$

где  $j = a, b, c$ ,  $T_c = (L + M)/r$  — постоянная времени статорных обмоток,  $\varphi = \arctg \Omega T_c$

$$\sigma(nT) = e^{\tau_{1an}/T_c} + e^{\tau_{1bn}/T_c} + e^{\tau_{1cn}/T_c}. \quad (47)$$

С учетом (38) разностное уравнение (46) приводится к виду

$$\delta_j((n+1)T) = e^{-T/T_c} [\delta_j(nT) - (E/r)(e^{\tau_{1jn}/T_c} - \sigma(nT)/3)] + \Delta_{ej}(nT) + \Delta_{sj}(nT), \quad j = a, b, c, \quad (48)$$

где  $\Delta_{ej}(nT) = E_m [r^2 + \Omega^2(L + M)^2]^{-1/2} [\sin(\Omega(n+1) \times T - \varphi_j + \theta - \varphi) - e^{-T/T_c} \sin(\Omega nT - \varphi_j + \theta - \varphi)]$ ,  $\Delta_{sj}(nT) = I_{3m} [\sin(\Omega(n+1)T - \varphi_j) - e^{-T/T_c} \sin(\Omega nT - \varphi_j)]$ ,  $\tau_{1jn}$  определяется по формуле (19).

Систему разностных уравнений удобно записать в векторно-матричной форме

$$X_{n+1} = e^{-T/T_c} [X_n - (E/r) [D(X_n) - \sigma(X_n)/3] c] + \Delta_{en} + \Delta_{3n} \quad (49)$$

где  $X_n^T = [\delta_a(nT), \delta_b(nT), \delta_c(nT)]$  — вектор фазовых координат контура регулирования тока,  $T$  — знак транспонирования,  $D(X_n) = \text{diag}\{e^{\tau_{1jn}}\}$ ,  $j = a, b, c$  —  $3 \times 3$  диагональная матрица,  $c^T = [1, 1, 1]$  — постоянный вектор,  $\sigma(X_n) = \sigma(nT)$ ,  $\Delta_{en}^T = [\Delta_{ea}(nT), \Delta_{eb}(nT), \Delta_{ec}(nT)]$ ,  $\Delta_{3n}^T = [\Delta_{3a}(nT), \Delta_{3b}(nT), \Delta_{3c}(nT)]$ .

Зависимость матрицы  $D(X_n)$  и скаляра  $\sigma(X_n)$  от вектора  $X_n$  нелинейна даже в линейной зоне ШИМ (20), поскольку  $\tau_{1jn}$  зависящие от элементов вектора  $X_n$ , входят в показатель степеней экспонент, являющихся нелинейными функциями. Таким образом, при учете активного сопротивления статорных обмоток контур регулирования тока представляет собой нелинейную импульсную систему.

Декомпозиции системы нелинейных разностных уравнений (48) на три независимых разностных уравнения препятствует наличие в каждом из системы трех уравнений (48) члена  $\sigma(nT)$ , нелинейно зависящего от  $\delta_a(nT)$ ,  $\delta_b(nT)$  и  $\delta_c(nT)$ . Нелинейность разностных уравнений и невозможность их декомпози-

ции существенно усложняет анализ и синтез контура регулирования тока. Поэтому желательно аппроксимировать нелинейные разностные уравнения контура линейными уравнениями. Один из вариантов заключается в пренебрежении активным сопротивлением обмоток статора, что и было сделано выше. Другой подход основан на линеаризации экспоненциальной функции

$$e^{\tau_{1jn}/T_c} \approx 1 + \tau_{1jn}/T_c. \quad (50)$$

Полагая работу контура регулирования тока в линейной зоне ШИМ (20), в результате подстановки (50) с учетом (16) получаем

$$\sigma[nT] \approx 3 + (T/T_c) \{ 3/2 + (K_p/2\delta_m) [\delta_a(nT) + \delta_b(nT) + \delta_c(nT)] \} = 3 + (3/2) T/T_c \quad (51)$$

$$e^{\tau_{1jn}/T_c} - (1/3)\sigma[nT] \approx 1 + (T/2T_c)(1 + K_p\delta_{jn}/\delta_m) - 1 - T/(2T_c) = [TK_p/(2T_c\delta_m)] \delta_{jn} \quad (52)$$

Выражения (51, 52) свидетельствуют о декомпозиции и линеаризации системы разностных уравнений (48). Подстановка (52) в (48) дает

$$\begin{aligned} \delta_j((n+1)T) &= \alpha_1 \delta_j(nT) + 2\sin(\Omega T/2) \{ I_{3m} \cos(\Omega nT - \varphi_j + \Omega T/2) + E_m [r^2 + \Omega^2(L + M)^2]^{-1/2} \cos(\Omega nT - \varphi_j + \theta - \varphi + \Omega T/2) \} + (1 - e^{-T/T_c}) \{ I_{3m} \sin(\Omega nT - \varphi_j) + E [r^2 + \Omega^2(L + M)^2]^{-1/2} \sin(\Omega nT - \varphi_j + \theta - \varphi) \}, \\ & j = a, b, c, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\text{где } \alpha_1 = e^{-T/T_c} (1 - ET K_p / (2r T_c \delta_m)) = e^{-T/T_c} [1 - ET K_p / (2(L + M) \delta_m)] = e^{-T/T_c} \alpha. \quad (54)$$

Из выражения (54) находим критическое значение коэффициента усиления регуляторов фазных токов, соответствующее границе устойчивости контура ( $\alpha_1 = -1$ ):

$$K_p = 2(1 + e^{T/T_c})(L + M) \delta_m / (ET). \quad (55)$$

Сравнивая (55) с (31), видим, что с учетом активного сопротивления обмоток статора критический коэффициент усиления регулятора оказывается в  $(1 + e^{T/T_c})/2 \approx 1 + rT/[2(L + M)]$  раз больше.

Соответствующее  $\alpha_1 = 0$  значение  $K_p$ , полученное из формулы (54), совпадает со значением, определяемым формулой (32) и найденным из условия  $\alpha = 0$  в уравнении (27). Выбрав указанное значение  $K_p$ , соответствующее максимальному быстродействию контура в линейной зоне ШИМ, получаем установившийся режим изменения ошибок управления фазных регуляторов

$$\delta_j(nT) = 2\sin(\Omega T/2) \{ I_{3m} \cos(\Omega nT - \varphi_j - \Omega T/2) + E_m [r^2 + \Omega^2(L + M)^2]^{-1/2} \cos(\Omega nT - \varphi_j + \theta - \varphi - \Omega T/2) \} + (1 - e^{-T/T_c}) \{ I_{3m} \sin(\Omega(n-1)T - \varphi_j) + E_m [r^2 + \Omega^2(L + M)^2]^{-1/2} \sin(\Omega(n-1)T - \varphi_j + \theta - \varphi) \}, \quad j = a, b, c. \quad (56)$$

В наиболее неблагоприятном случае  $\theta \approx \varphi$  и согласно выражению (56) составляющие ошибки управления, вызванные задающим и возмущающим воздействиями, складыва-



ются. Поскольку в реальных случаях выполняются неравенства

$$\Omega T \ll 1, T/T_c \ll 1,$$

из выражения (56) можно найти максимальную ошибку управления для фазовых контуров регулирования тока. Приравняв ее значению  $\delta_m K_p$ , соответствующему границе линейности ШИМ, несложно получить неравенство, определяющее выбор напряжения питания инвертора

$$E > 2\{E_m + [r^2 + \Omega^2(L + M)^2]^{1/2} I_{3m}\}. \quad (57)$$

Принимая во внимание малость  $r$  по сравнению с  $\Omega(L + M)$  при максимальной частоте  $\Omega$  и векторное суммирование падений напряжения на активном и индуктивном сопротивлениях статорной обмотки, величина  $E$ , определенная с учетом активного сопротивления (57), незначительно отличается от значения (45), определяемого без учета активного сопротивления.

Из выражения (56) очевидно, что при уменьшении периода коммутации  $T$  и сохранении неизменного запаса устойчивости ошибка управления контура регулирования тока уменьшается практически пропорционально, поскольку

$$2\sin(\Omega T/2) \approx \Omega T, 1 - e^{-T/T_c} \approx T/T_c.$$

### 5. Повышение точности контура регулирования тока

Если по энергетическим соображениям выбран период коммутации, недостаточный для получения допустимых ошибок управления, для повышения точности контура регулирования тока можно использовать принцип комбинированного управления, сочетающий

управление по отклонению с управлением по задающему и возмущающему воздействию.

Для полного устранения составляющей ошибки, вызванной задающим воздействием, необходимо подавать на входы однофазных контуров регулирования тока задающие воздействия  $I_{3j}(t)$  (35), увеличенные на значение соответствующей ошибки. Очевидно, что, пренебрегая для простоты активным сопротивлением обмоток статора ( $r = 0$ ), можно определять амплитуду добавки к задающему воздействию по формуле (42), а ее фазовый сдвиг по отношению к задающему воздействию принять равным  $\pi/2$  в сторону опережения. Физическая причина опережающего фазового сдвига на  $\pi/2$  состоит в том, что ток в индуктивности отстает по фазе от напряжения на ней на  $\pi/2$ .

Для компенсации ошибки, вызываемой возмущающим воздействием, необходима полная информация о нем, то есть необходимо измерять ЭДС, наводимые в обмотках статора полюсами вращающегося ротора. Добавка к задающему воздействию при  $r = 0$  должна иметь амплитуду, определяемую выражением (43), а по фазе должна практически совпадать с ЭДС вращения. Совпадение фаз объясняется тем, что для компенсации действия ЭДС вращения напряжение на обмотке необходимо повысить на величину этой ЭДС. Однако компенсация ошибки, вызванной возмущающим воздействием, может привести к образованию положительной обратной связи с коэффициентом больше критического и к самовозбуждению привода, поскольку ток статора влияет на скорость ротора и, следовательно, на величину ЭДС вращения. Указанная опасность в условиях нестабильных параметров и нелинейности системы допускает только частичную компенсацию ошибок управления, вызываемых ЭДС вращения.

### 6. Проверка полученных результатов

Проверка проводилась на математической модели контура регулирования тока, построенной в среде Matlab 6.5, Simulink 5, SimPower Systems, представленной на рис. 3.

С целью количественной проверки результатов в модели инвертора использованы идеальные ключи (Ideal Switch), а не модели MOSFET или IGBT. Индуктивную нагрузку инвертора моделирует блок 3-Phase RLC Branch1. Генератор заданных значений трехфазного тока ( $I_{3j}(t), j = a, b, c$ ) построен на программируемом трехфазном генераторе напряжения (3-Phase Programmable Voltage Source 1), трехфазной активной нагрузке (3-Phase Series Branch) и трехфазном измерителе (3-Phase V1 Measurement), моделирующем датчик трехфазного тока. Демультимплексоры Demux 1 и Demux 2 вместе с тремя сумматорами представляют трехфазный измеритель ошибок управления в контуре регулирования тока. Пропорциональные регуляторы тока моделируются тремя усилителями Gain 1, 2, и 3. Широтно-импульсные преобразователи, описываемые уравнением (19), представлены в модели фиксаторами нулевого порядка (Zero-Order Hold 1, 2 и 3) и блоками Subsystem 1, 2 и 3. Последние представляют собой широтно-импульсные модуляторы с синхронными генераторами линейно возрастающего опорного сигнала.

В модели установлены следующие гипотетические значения параметров:

$$E = 50 \text{ В}, r = 0, L + M = 1 \times 10^{-2} \text{ Гн}, \\ T = 2,5 \times 10^{-4}, \delta_m = 1.$$

Результаты моделирования при практически постоянных  $I_{3j}(t)$  ( $I_{3a} = I_m \sin 0^\circ = 0, I_{3b} = I_m \sin(-120^\circ) = -I_m \sqrt{3}/2, I_{3c} = I_m \sin(-240^\circ) = I_m \sqrt{3}/2$ ), полученных при очень низкой час-

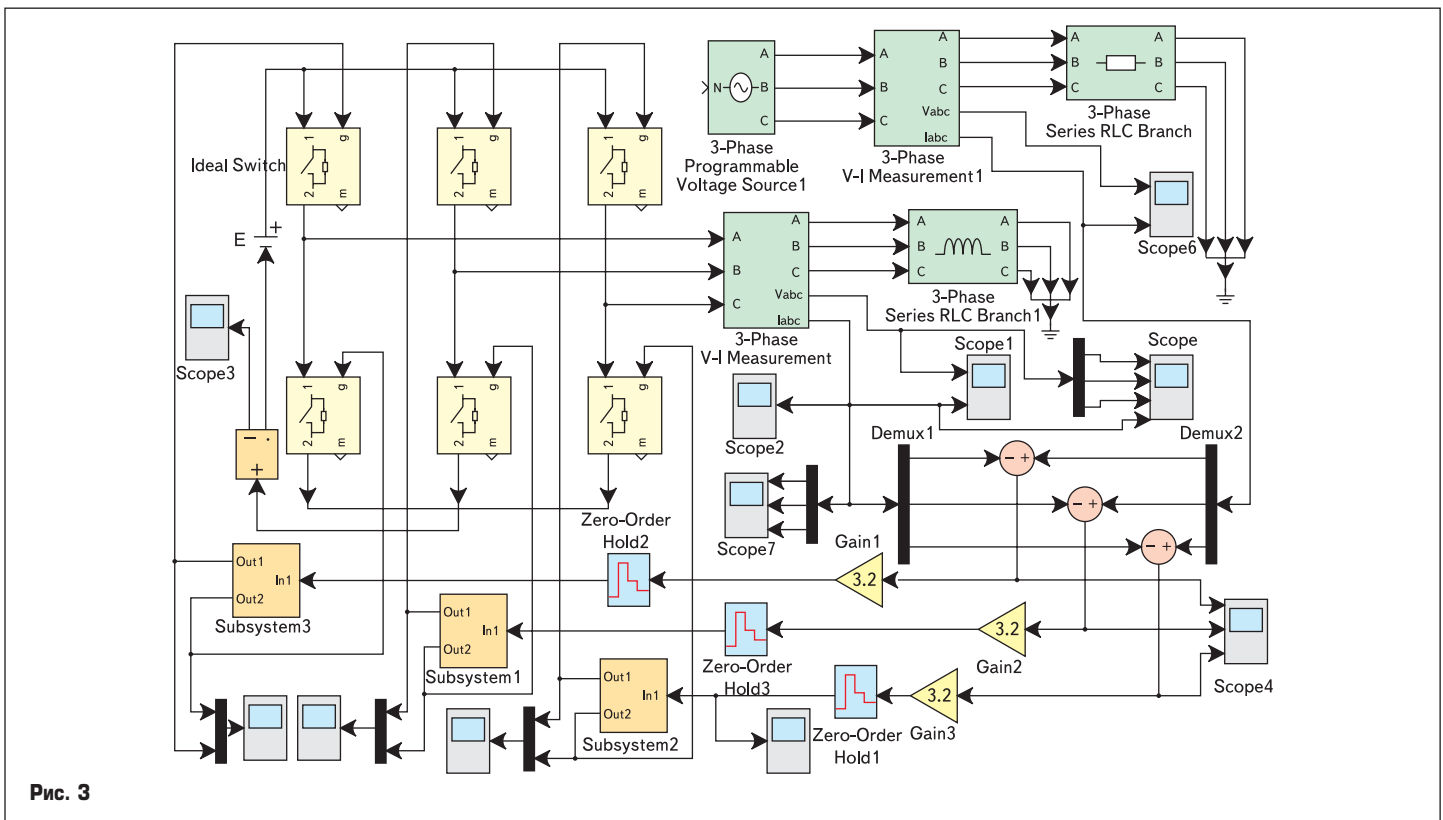


Рис. 3

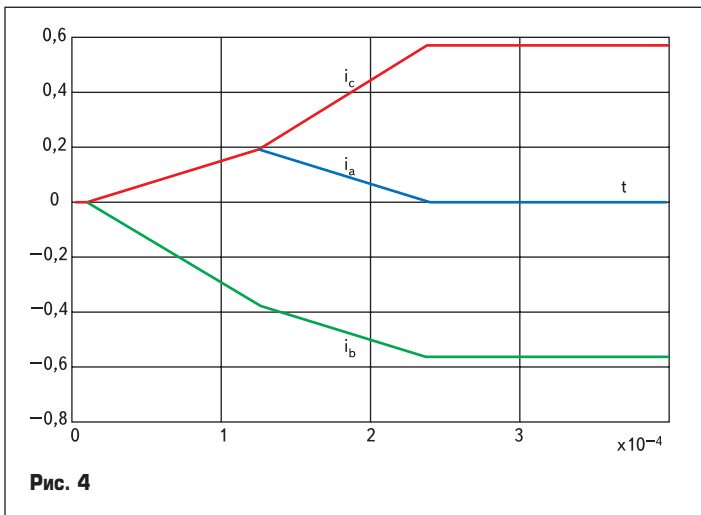


Рис. 4

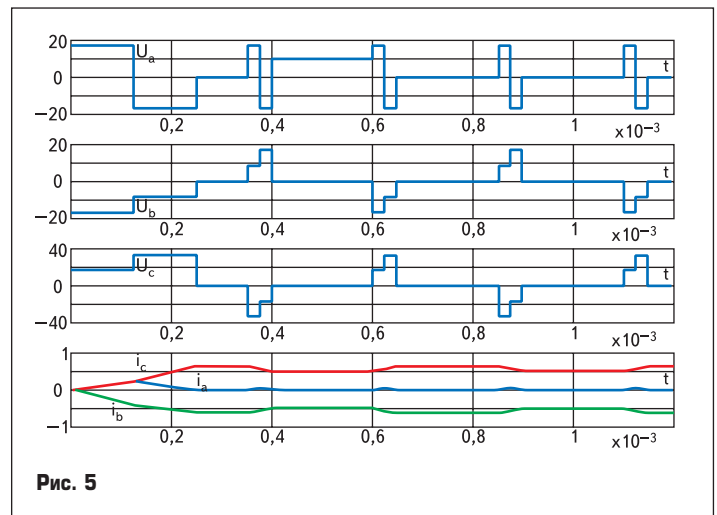


Рис. 5

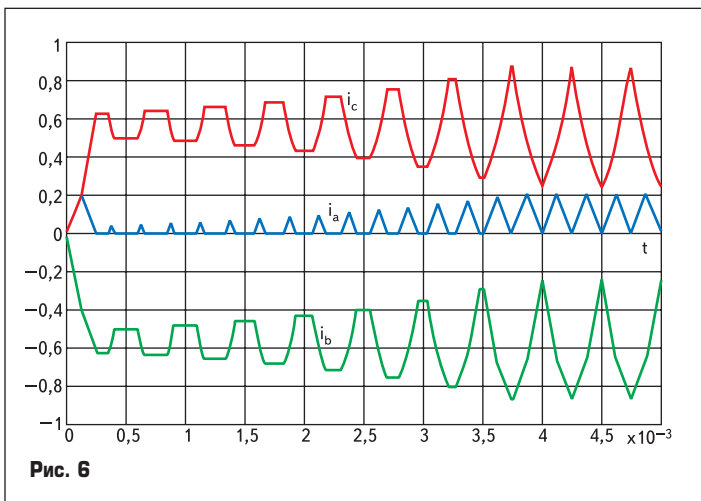


Рис. 6

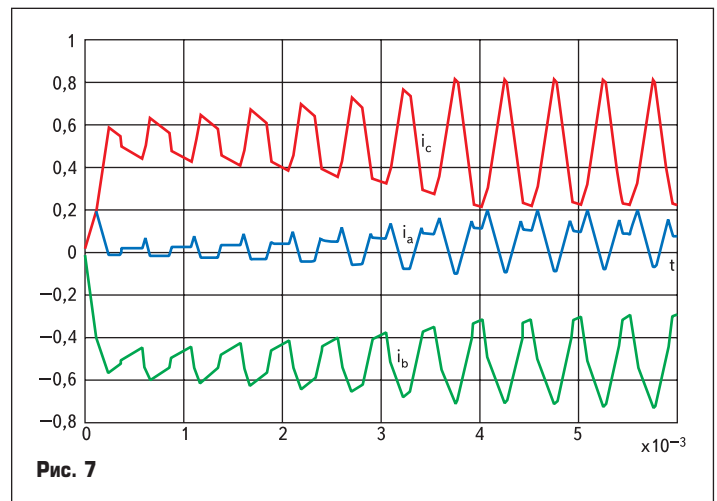


Рис. 7

тоте  $\Omega$  генератора 3-Phase Programmable Voltage, рассмотрены ниже. На рис. 4 представлен переходный процесс установления постоянных токов при значении

$$K_p = 2(L + M)\delta_m / (ET) = 2 \times (10^{-2} \times 1) / (50 \times 2,5 \times 10^{-4}) = 1,6,$$

обеспечивающем наибольшее быстродействие контура, то есть окончание переходного процесса в первом периоде коммутации. Для протекания переходного процесса в линейной зоне ШИМ задано значение  $I_m \sqrt{3}/2 = 0,56$  А. Увеличение  $K_p$  вдвое соответствует границе устойчивости контура регулирования тока.

При тех же значениях  $I_y$  переходный процесс начинается в зоне насыщения ШИМ. Со второго периода коммутации наблюдаются незатухающие колебания половинной частоты в линейной зоне ШИМ (рис. 5), соответствующие значению  $\alpha = -1$ . Однако при критическом значении  $K_p$  контур регулирования тока является «негрубой» системой. Это означает, что достаточно ничтожного изменения любого из параметров, влияющих на его значение (31), чтобы контур регулирования тока сместился с колебательной границы устойчивости в область устойчивости или в область неустойчивости. В первом случае колебания со временем затухнут. Во втором же случае

амплитуда колебаний возрастает. При вхождении колебаний в зону насыщения ШИМ рост амплитуды колебаний прекращается и устанавливаются автоколебания определенной амплитуды.

На рис. 6 представлен переходный процесс установления субгармонических автоколебаний при  $K_p = 3,4$  (на 0,2 больше критического). Из рис. 6 видно, что частоты наблюдаемых автоколебаний оказываются разными в разных фазах. В фазах «b» и «с» наблюдаются автоколебания половинной частоты, а в фазе «a» автоколебания имеют частоту коммутации. Интересно, что в режиме автоколебаний постоянные составляющие токов  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$ ,

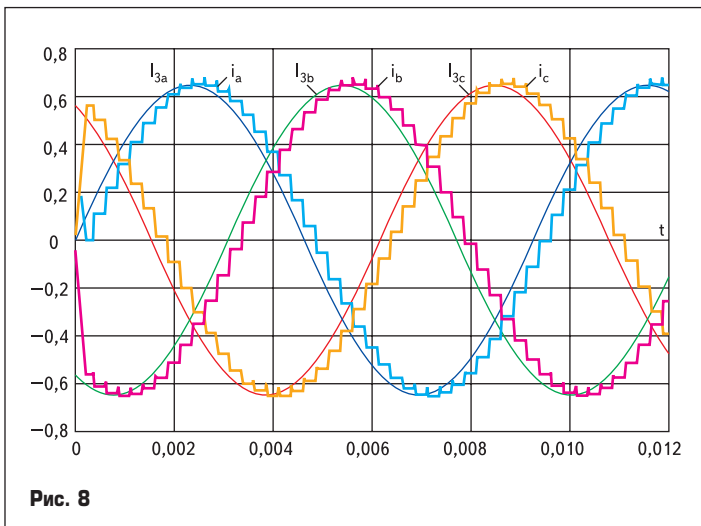


Рис. 8

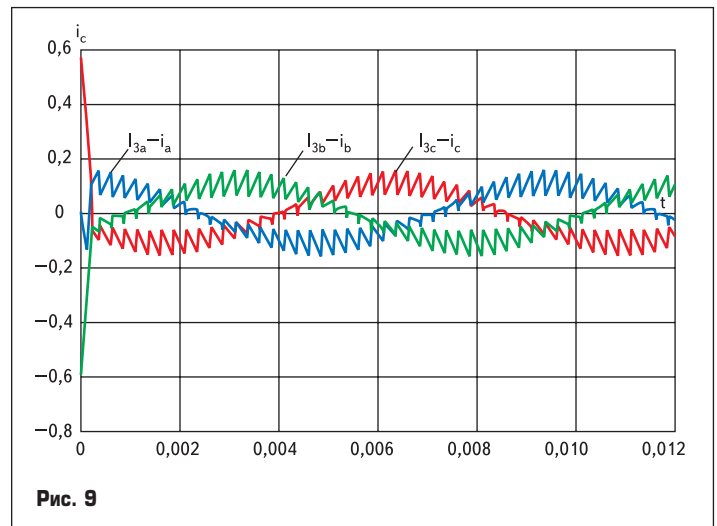


Рис. 9

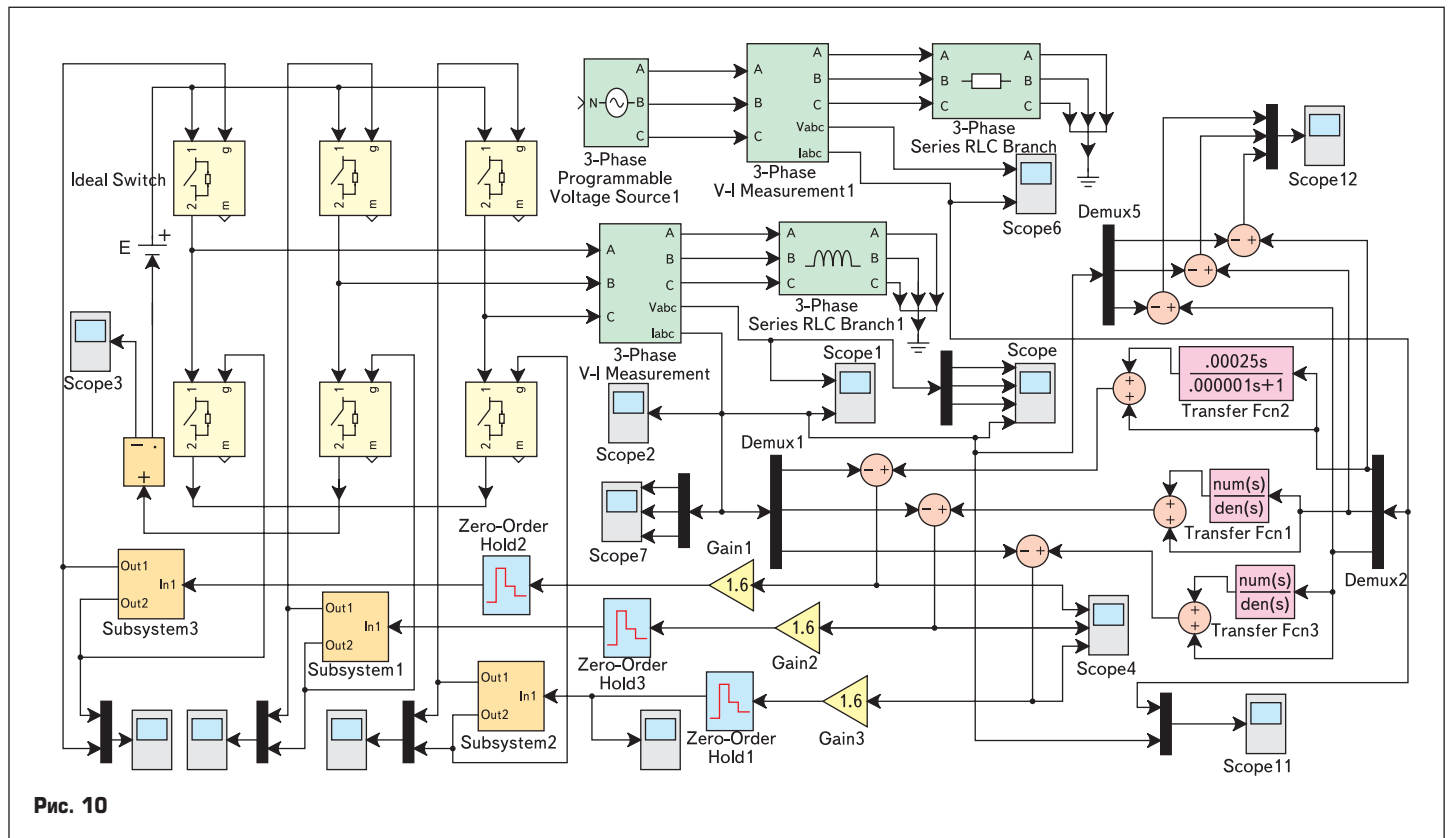


Рис. 10

$i_c(t)$  отличаются от заданных значений  $I_{3a}, I_{3b}, I_{3c}$ . При учете сопротивления статорных обмоток  $r = 6 \text{ Ом}$  при том же значении  $K_p = 3, 4$  устанавливаются автоколебания половинной частоты во всех фазах (рис. 7). Происходят они в линейной зоне ШИМ. Объясняется это уже отмеченной выше нелинейностью контура регулирования тока при отличном от нуля активном сопротивлении обмоток статора.

Результаты моделирования процесса отработки гармонических токов (35) при нулевых начальных условиях,  $r = 0, K_p = 1,6$ , частоте  $\Omega = 2\pi \times 108 \text{ рад/с}$  (108 Гц) и той же величине  $I_m$ , при которой исследовали отработку постоянных заданных токов ( $I_m\sqrt{3}/2 = 0,56 \text{ А}$ ) в линейной зоне, представлены на рис. 8. Контур регулирования тока выходит на установившийся режим уже в конце первого периода коммутации. Величины  $\Omega$  и  $(L + M)$  взяты не из реальных условий, а из соображений наглядности временных диаграмм. Из рис. 8 видно, что обрабатываемые токи  $i_j(t)$  отличаются от заданных токов  $I_{3j}(t), j = a, b, c$  практи-

чески только по фазе. Это вызывает ошибки управления, показанные на рис. 9.

Для компенсации ошибок управления, вызываемых изменяющимися задающими воздействиями (35), достаточно прибавить к задающим воздействиям их производные с соответствующими коэффициентами. Дифференцируя (35), получаем

$$dI_{3j}(t) / dt = \Omega I_{3m} \cos(\Omega t - \varphi_j), j = a, b, c$$

и сравнивая с выражением (41), записанным для реальных условий ( $\Omega t \ll 1$ ),

$$\delta_{3jz}(NT) = \Omega T I_{3m} \cos(\Omega T - \varphi_j),$$

находим, что выходной сигнал дифференциатора надо умножить на коэффициент, равный периоду коммутации  $T$ .

Математическая модель контура регулирования тока с компенсацией ошибки, вызываемой изменяющимся задающим воздействием, представлена на рис. 10. Дифференциро-

вание задающего воздействия осуществляют блоки Transfer Function 1, 2, 3 с передаточной функцией  $0,00025s / (0,000001s + 1)$ , выходные сигналы которых складываются с задающими воздействиями.

На рис. 11 представлен переходный процесс отработки тех же, что и выше, гармонических задающих воздействий при компенсации ошибки их отработки. Из рис. 12, на котором показаны кривые изменения ошибок управления (13), видно, что после окончания переходного процесса ошибки управления содержат только пульсационную составляющую, как и ожидалось.

**Выводы**

1. Трехфазный контур регулирования тока при четном индуктивном сопротивлении обмоток статора синхронного двигателя с постоянными магнитами на роторе в линейной зоне широтно-импульсного модулятора описывается тремя независимыми линейными разностными уравнениями первого порядка.

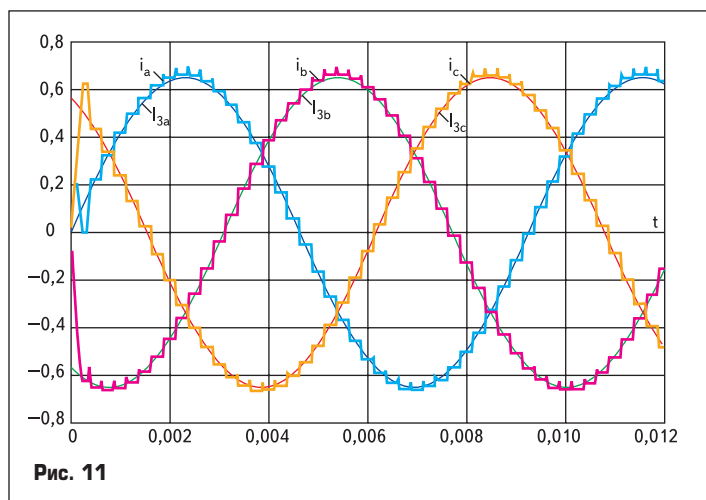


Рис. 11

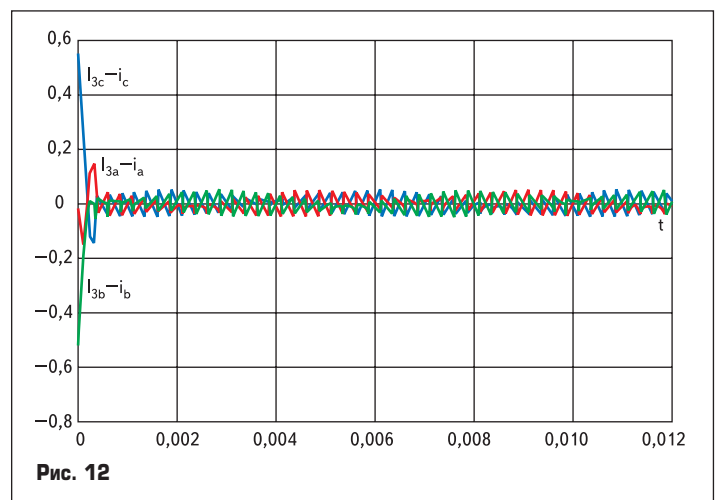


Рис. 12

2. Учет активного сопротивления обмоток делает разностные уравнения нелинейными и зависимыми.
3. Превышение критического коэффициента усиления регуляторов тока вызывает неустойчивость контура регулирования тока, что приводит к субгармоническим автоколебаниям.
4. При чисто индуктивном сопротивлении статорных обмоток субгармонические автоколебания происходят в зоне насыщения ШИМ, а при активно-индуктивном сопротивлении могут существовать и в линейной зоне ШИМ.
5. При заданном запасе устойчивости в контуре регулирования тока его ошибки управления пропорциональны периоду коммутации автономного инвертора.
6. Точность контура регулирования тока можно существенно повысить за счет использования принципа комбинированного управления.
7. Напряжение питания автономного инвертора, обеспечивающее отработку заданных синусоидальных токов должно в 2 раза и более превышать сумму амплитуд ЭДС вращения и падения напряжения, создаваемого заданным током на сопротивлении обмотки статора синхронного двигателя. ■

### Литература

1. Коршунов А. Равноускоренный частотный пуск синхронного двигателя с постоянными магнитами на роторе // Силовая электроника. 2007. № 1.
2. Изосимов Д. Б., Байда С. В. Алгоритмы векторной широтно-импульсной модуляции трехфазного автономного инвертора // Электротехника. 2004. № 4.
3. Крутиков К. К., Рожков В. В., Петрухин Ю. В. Анализ и моделирование симплексных алгоритмов управления трехфазным автономным инвертором для частотного асинхронного электропривода // Электротехника. 2006. № 5.