

Равноускоренный частотный пуск синхронного двигателя

с постоянными магнитами на роторе

В статье рассмотрен процесс равноускоренного частотного пуска синхронного двигателя на холостом ходе, при постоянном моменте нагрузки и при вентиляторной нагрузке. На фазовой плоскости двигателя, по оси абсцисс которой откладывается отставание ротора от поля статора, определена область устойчивости равноускоренного разгона.

**Анатолий Коршунов,
д. т. н.**

Невозможность асинхронного пуска вследствие отсутствия обмоток на роторе синхронного двигателя (СД) вызывает интерес к частотному синхронному пуску. Он осуществляется при питании статорной обмотки от автономного инвертора путем плавного повышения частоты. Очевидно, при слишком быстром повышении частоты СД будет выпадать из синхронизма, что делает невозможным его пуск. Слишком медленное повышение частоты снижает быстродействие привода. Поэтому исследование процесса частотного пуска СД имеет важное практическое значение.

Отсутствие обмоток на роторе СД исключает возможность контроля скорости вращения и угла поворота ротора, что обычно осуществляется при пуске СД [1]. Поэтому основная задача статьи — исследование возможностей синхронного равноускоренного пуска без контроля углового положения и скорости ротора.

1. Математическая модель СД

Положим, что статор СД питается от трехфазного генератора синусоидального тока управляемой частоты. В этом случае при обычных допущениях можно описать СД следующим дифференциальным уравнением:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_m \sin(p(\varphi - \theta)) - M_n, \quad (1)$$

где J — суммарный момент инерции привода, M_m — максимальный синхронизирующий момент двигателя, M_n — момент нагрузки, p — число пар полюсов, θ и φ — углы поворота ротора и поля статора в угловых радианах.

Обозначив $\zeta = p\theta$, $\xi = p\varphi$ — углы поворота ротора и поля статора в электрических радианах (эл. рад), уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{J}{p} \frac{d^2\zeta}{dt^2} = M_m \sin(\xi - \zeta) - M_n$$

или

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \varepsilon_m \sin(\xi - \zeta) - \frac{pM_n}{J}, \quad (2)$$

где ε_m — максимальное ускорение в эл.рад/с².

Положим $M_n = 0$. Этот гипотетический случай близок к реальному, например, при вентиляторной нагрузке

$$M_n = k_v \left| \frac{d\theta}{dt} \right| \frac{d\theta}{dt}, \quad k_v = \text{const} \quad (3)$$

на начальном этапе пуска ($d\theta/dt \approx 0$).

При этом уравнение (2) упрощается до

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \varepsilon_m \sin(\xi - \zeta). \quad (4)$$

2. Анализ пуска на холостом ходе

Для лучшего понимания процессов рассмотрим вначале достаточно медленный пуск, при котором разность $\xi - \zeta$ настолько мала, что можно с высокой точностью произвести замену

$$\varepsilon_m \sin(\xi - \zeta) \approx \varepsilon_m (\xi - \zeta). \quad (5)$$

В случае (5) нелинейное дифференциальное уравнение (4) становится линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \varepsilon_m \zeta = \varepsilon_m \xi, \quad (6)$$

решение которого не вызывает никаких затруднений.

При равноускоренном разгоне

$$\xi = \varepsilon(t/2), \quad (7)$$

что соответствует равномерному повышению частоты при пуске СД.

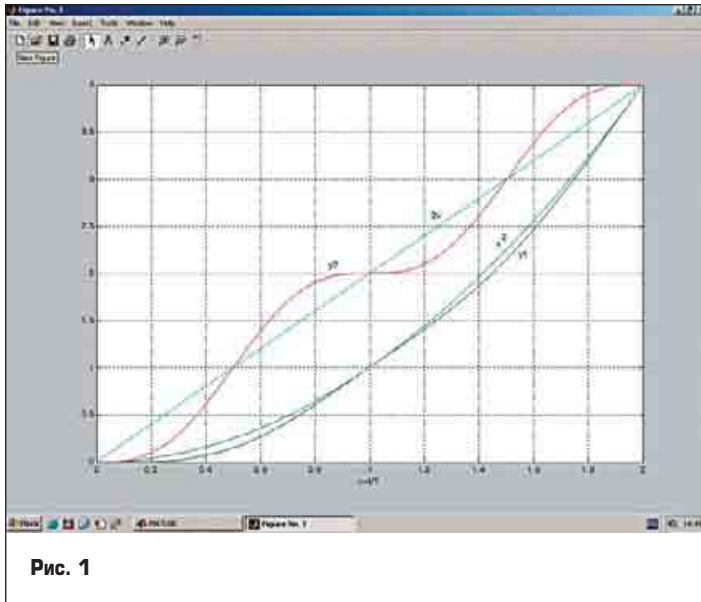


Рис. 1

Нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что выражение

$$\zeta = \varepsilon \frac{t^2}{2} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} + \zeta_m \sin(\sqrt{\varepsilon_m} t + \psi) \quad (8)$$

представляет собой решение дифференциального уравнения (6). Физически это соответствует равноускоренному разгону ротора при постоянном отставании его от поля статора, обеспечивающего необходимую для равноускоренного разгона постоянную составляющую вращающего (синхронизирующего) момента СД, на которую наложены его собственные гармонические колебания, амплитуда ζ_m и фаза ψ которых зависят от начальных условий.

Если пуск производится из согласованного состояния при неподвижном роторе, то есть при нулевых начальных условиях:

$$\zeta(0) = 0, \quad (d\zeta/dt)(0) = 0,$$

несложно получить

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \cos(\sqrt{\varepsilon_m} t) + \varepsilon \frac{t^2}{2} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} = \\ &= \varepsilon \frac{t^2}{2} - 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \sin^2(\sqrt{\varepsilon_m} \frac{t}{2}), \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \varepsilon t - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_m}} \sin(\sqrt{\varepsilon_m} t). \end{aligned} \quad (9)$$

На рис. 1 представлены графики зависимостей $y_1 = \zeta/(2\pi\varepsilon/\varepsilon_m)$ и $y_2 = (d\zeta/dt)/(\pi\varepsilon/\varepsilon_m)$ от $x = t/T$, где $T = 2\pi\sqrt{\varepsilon_m}$ — период собственных колебаний СД. На рис. 1 показано наложение собственных колебаний СД на процесс его равноускоренного разгона.

Можно полностью исключить собственные колебания СД при разгоне, выбрав необходимое начальное значение

$$\zeta(0) = -\varepsilon/\varepsilon_m. \quad (10)$$

В этом случае

$$\psi = \pi/2, \quad \zeta_m = 0,$$

что дает

$$\zeta(t) = \varepsilon \frac{t^2}{2} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \varepsilon t. \quad (11)$$

Весьма полезным оказывается рассмотрение переходного процесса на фазовой плоскости с координатами

$$x = \xi - \zeta, \quad y = \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} - \frac{d\zeta}{dt}, \quad (12)$$

где x — отставание ротора от поля статора, а y — скорость его изменения. Как известно, между состоянием системы и точками фазовой плоскости существует взаимно однозначное соответствие.

В рассматриваемом случае с учетом (7) получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon - \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \varepsilon - \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (13)$$

Подстановка (12) и (13) в (6) дает

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon - \varepsilon_m x \quad \text{или} \quad y \frac{dy}{dx} = \varepsilon - \varepsilon_m x. \quad (14)$$

Интегрируя (решая) дифференциальное уравнение (14), получаем

$$y^2 = 2\varepsilon x - \varepsilon_m x^2 + C, \quad (15)$$

где постоянная интегрирования

$$C = y^2(0) + \varepsilon_m x^2(0) - 2\varepsilon x(0).$$

Очевидно, в рассматриваемом случае $y(0) = 0$. Фазовая траектория представляет собой эллипс

$$y^2 + \varepsilon_m \left(x - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}\right)^2 = \varepsilon_m \left(x(0) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}\right)^2, \quad (16)$$

изображенный на рис. 2, для случаев $x(0) = 0$; $1/2(\varepsilon/\varepsilon_m)$; $\varepsilon/\varepsilon_m$. Масштаб по оси y выбран таким образом, чтобы эллипсы превратились в окружности.

Заметим, что эллипс, соответствующий $x(0) = \varepsilon/\varepsilon_m$, вырождается в точку, совпадающую с центром фазовых траекторий

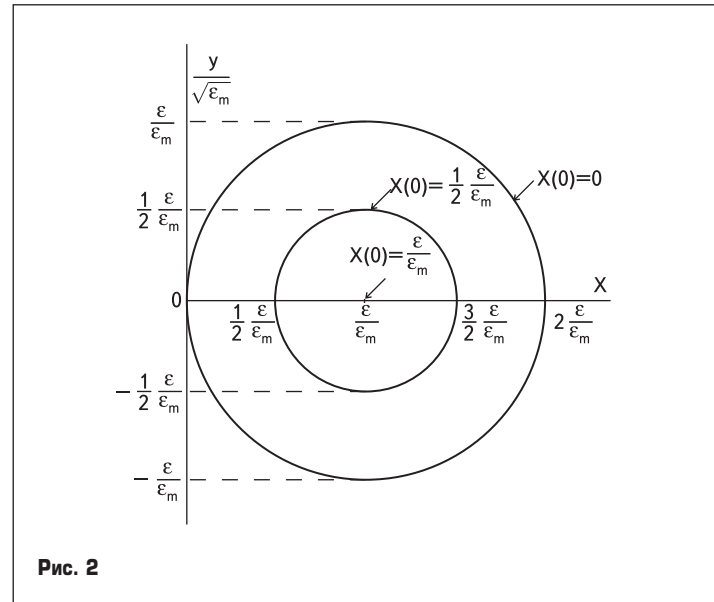


Рис. 2

$$x_{ц}(0) = \varepsilon/\varepsilon_m, \quad y_{ц} = 0. \quad (17)$$

Это соответствует отсутствию собственных колебаний СД при пуске.

Исключить колебания при пуске СД можно и при нулевых начальных условиях. Для этого достаточно начать равноускоренное увеличение угла поворота поля статора не с нуля, а со значения $\varepsilon/\varepsilon_m$, то есть вместо (7) положить

$$\xi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} + \varepsilon \frac{t^2}{2}. \quad (18)$$

Учитывая невозможность точной реализации генератора тока, питающего статор СД, изменить угол поворота поля статора скачком можно только приближенно.

При достаточно большой величине ε отставание ротора от поля статора ($\xi - \zeta$) принимает значения, для которых равенство (5) становится слишком приближенным, и линейная модель (6) не позволяет выявить существенные особенности процесса пуска, связанные с возможным выпадением СД из синхронизма. Поэтому необходимо вернуться к уравнению (4).

Решение нелинейного дифференциального уравнения (4) через элементарные функции не выражается, что затрудняет его исследование. Для упрощения задачи рассмотрим фазовые траектории уравнения (4). Они описываются дифференциальным уравнением

$$y \frac{dy}{dx} = \varepsilon - \varepsilon_m \sin x, \quad (19)$$

вытекающим из уравнения (4) с учетом (12) и (13).

Интегрирование дифференциального уравнения (19) дает

$$y^2 = 2\varepsilon x + 2\varepsilon_m \cos x + C, \quad (20)$$

где постоянная интегрирования C при $y(0)=0$ имеет значение

$$C = -2\varepsilon x(0) - 2\varepsilon_m \cos(x(0)). \quad (21)$$

С учетом (21) выражение (20) принимает вид:

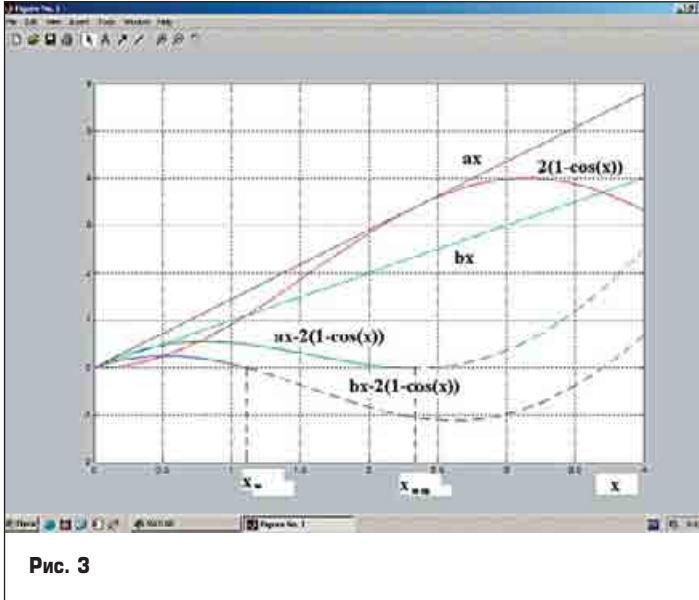


Рис. 3

$$y^2 = 2\epsilon(x - x(0)) + 2\epsilon_m[\cos x - \cos(x(0))]. \quad (22)$$

Рассмотрим нулевые начальные условия, приводящие (22) к виду

$$y^2/\epsilon_m = 2\epsilon x/\epsilon_m - 2(1 - \cos x). \quad (23)$$

На рис. 3 в координатах $(x, y^2/\epsilon_m)$ построены смещенная косинусоида $2(1 - \cos x)$ и две прямые: ax и bx ($a = 2\epsilon_{пр}/\epsilon_m$, $b = 2\epsilon/\epsilon_{пр}$, $\epsilon < \epsilon_m$), первая из которых касается косинусоиды. Поскольку разность косинусоиды и прямой дает интегральную кривую y^2/ϵ_m , очевидно, что ограниченное решение дифференциального уравнения (14) существует при $0 < \epsilon < \epsilon_{пр}$. На фазовой плоскости (x, y) фазовая траектория

$$y = \pm\sqrt{2\epsilon x - 2\epsilon_m(1 - \cos x)} \quad (24)$$

представляет собой замкнутую кривую, подобную эллипсу. Действительно, переписав дифференциальное уравнение (14) в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\epsilon - \epsilon_m \sin(x)}{y}, \quad (25)$$

легко найти особую точку ($x_ц = \arcsin(\epsilon/\epsilon_m) < \pi/2$, $y_ц = 0$), представляющую собой центр фазовых траекторий. На рис. 4 представлена фазовая траектория системы при $\epsilon/\epsilon_m = 0,5$ в относительных единицах вдоль оси y , описываемая выражением

$$\frac{y}{\sqrt{\epsilon_m}} = \pm\sqrt{2\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_m}x - 1 + \cos x\right)}.$$

Вертикальная прямая $x = x_ц = \text{const}$ и ось x образуют 4 квадранта с чередующимися знаками производной dy/dx , определенными согласно дифференциальному уравнению (25). Знаки производной в квадрантах выделены кружками.

Легко установить, исследуя (20) на экстремум, что y принимает максимальное по величине значение при $x = x_ц$. В случае $x(0) = 0$ оно составляет

$$y_m = \pm\sqrt{2\epsilon x_ц - 2\epsilon_m(1 - \cos x_ц)}. \quad (26)$$

Максимальное значение x представляет собой наименьший положительный корень уравнения

$$(\epsilon/\epsilon_m)x - 1 + \cos x = 0. \quad (27)$$

Решение (27) при $\epsilon/\epsilon_m = 0,5$ дает значение $x_m = 1,109$ эл.рад.

Физически движение изображающей точки по подобной эллипсу замкнутой фазовой траектории соответствует разгону СД, сопровождаемому периодическими незатухающими колебаниями системы, подобными представленным на рис. 1.

При пуске системы (начало вращения поля статора) ротор начинает вращаться, отставая от поля статора. Это отставание, равное x , и скорость его изменения y (12) увеличиваются (дуга 0А на рис. 4), пока при $x = x_ц$ y не примет максимальное значение y_m . В дальнейшем скорость увеличения отставания начинает уменьшаться, поскольку развиваемое СД ускорение превосходит ϵ и скорость ротора растет быстрее скорости поля. Однако отставание ротора продолжает расти (дуга АВ). В момент равенства скоростей поля и ротора рост отставания прекращается. Оно принимает максимальное значение x_m и начинает уменьшаться, поскольку скорость ротора становится больше скорости вращения поля статора (дуга ВС). В момент уменьшения отставания до значения $x = x_ц$ скорость его уменьшения принимает максимальное значение y_m ($y = -y_m$) и начинает уменьшаться, поскольку ускорение СД становится меньше ϵ и скорость ротора растет медленнее скорости поля (дуга С0). В момент следующего равенства скоростей ротора и поля при $y = 0$, $x = 0$ (точка 0 фазовой траектории) заканчивается первый период колебаний. С этого момента процесс колебаний повторяется, а изображающая точка очередной раз обходит замкнутую траекторию по часовой стрелке.

Очевидно, что разгон СД сопровождается колебаниями его ускорения (вращающего момента) вокруг необходимого значения ϵ . С увеличением ϵ/ϵ_m центр фазовых траекторий смещается вправо быстрее, чем растет ϵ/ϵ_m , поскольку $\arcsin \epsilon/\epsilon_m$ при увеличении ϵ/ϵ_m от 0

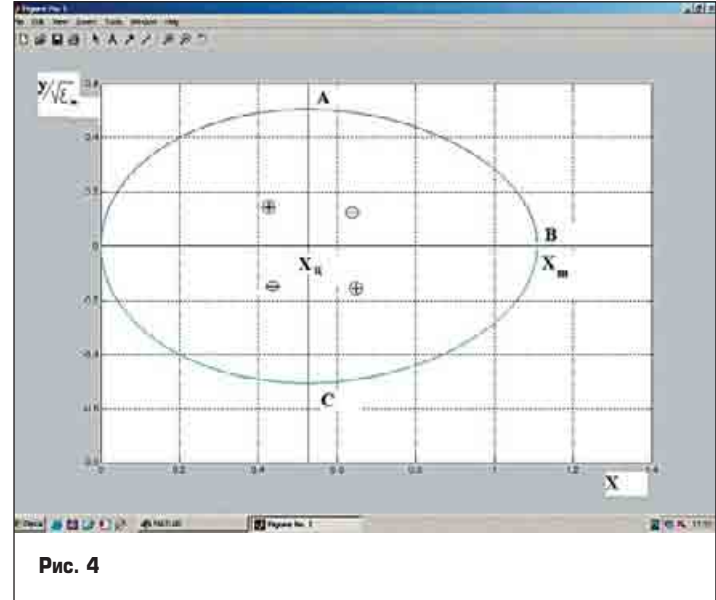


Рис. 4

до 1 растет быстрее своего аргумента. При этом происходит и увеличение амплитуды отставания x_m . Превышение значением x_m величины $\pi/2$ приводит к уменьшению значения ускорения в момент сравнения скоростей ротора и поля статора (точка В фазовой траектории). Пока ускорение СД в этот момент превышает ϵ , происходит колебательный разгон и двигатель не выпадает из синхронизма. В случае предельного значения $\epsilon = \epsilon_{пр}$ в момент равенства скоростей ротора и поля статора ускорение, развиваемое ротором, равно ускорению поля ϵ . Достаточно небольшого смещения точки В вправо вдоль оси x , чтобы развиваемое ротором ускорение стало при равенстве скоростей меньше ϵ . В этом случае рост скорости двигателя лавинообразно замедляется и происходит выпадение его из синхронизма. При смещении точки В влево вдоль оси x ускорение СД становится больше ϵ и колебательный разгон продолжается.

Для определения $\epsilon_{пр}$ ($\epsilon_{пр}/\epsilon_m$), необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sin x &= \epsilon_{пр}/\epsilon_m, \\ (\epsilon_{пр}/\epsilon_m)x - 1 + \cos x &= 0. \end{aligned}$$

Ее решением являются значение $\epsilon_{пр}/\epsilon_m$ и предельное значение максимального отставания $x_{мпр}$. Система уравнений следует из условия касания прямой $2\epsilon_{пр}/\epsilon_m$ и кривой $2(1 - \cos x)$ (рис. 3). Данную систему уравнений легко свести к одному уравнению подстановкой первого уравнения во второе, что дает

$$x \sin x - 1 + \cos x = 0.$$

Решая полученное уравнение, например, в системе Matlab, находим $x_{мпр} = 2,3311$ эл.рад (133,56 эл.град).

Как следует из вышеизложенного, можно обеспечить пуск с большим, чем $\epsilon_{пр}$, ускорением, если уменьшить или даже совсем исключить сопровождающие пуск колебания ротора СД. Достичь этого можно, организовав необходимое начальное отставание ротора от поля статора.

При пуске в случае опережающего положения ротора ($x(0) < 0$) устанавливаются колеба-

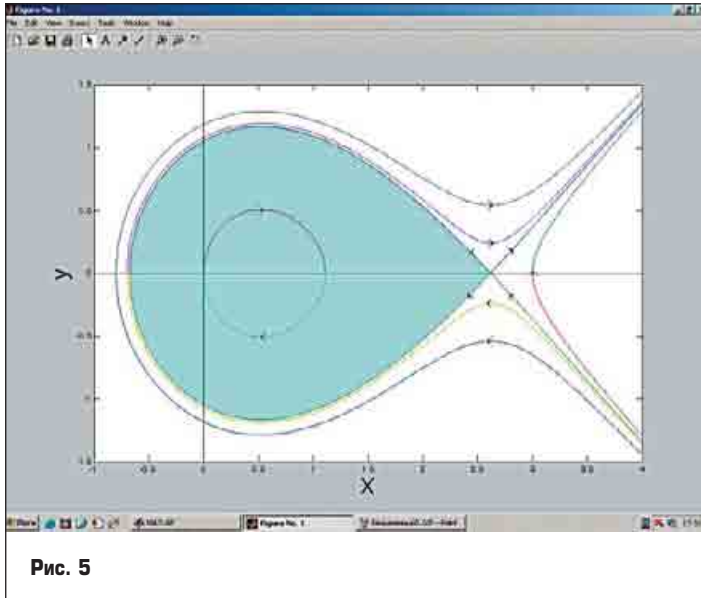


Рис. 5

ния большей амплитуды, чем при $(x(0)=0)$. При достаточно большом начальном опережении частотный пуск с постоянным ускорением ε становится невозможным, несмотря даже на выполнение сильного неравенства $\varepsilon < \varepsilon_{пр}$. Физическая причина этого заключается в начальном вращении ротора в сторону, противоположную вращению поля. В результате в момент согласования поле статора и ротор вращаются в противоположные стороны, отставание увеличивается быстрее, чем при нулевых начальных условиях. Равенство скоростей при этом наступает при большем значении x_m (рис. 4) или вообще не может наступить, как при $\varepsilon > \varepsilon_{пр}$.

Математический анализ показывает, что вторая особая точка на фазовой плоскости $(x = \pi - x_{ц}, y = 0)$, в отличие от первой $(x = x_{ц}, y_{ц} = 0)$, представляющей собой центр, оказывается «седлом» [2]. Из теории устойчивости известно, что к «седлу» асимптотически приближаются при $t \rightarrow \infty$ две фазовые траектории, имеющие общую касательную в «седле». Еще две фазовые траектории асимптотически приближаются к «седлу» при $t \rightarrow -\infty$ и также имеют в «седле» общую касательную. Первую пару фазовых траекторий называют устойчивыми «усами» «седла», а вторую пару — неустойчивыми «усами» «седла» [2]. Ни одна другая фазовая траектория не приближается к «седлу» неограниченно, хотя может проходить сколь угодно близко от «седла».

На рис. 5 представлен фазовый портрет СД в районе начала координат и двух особых точек. Построение фазового портрета упрощается наличием аналитического описания фазовых траекторий, проходящих через заданную точку фазовой плоскости. Подставляя в выражение интегральной кривой (20) координаты заданной точки фазовой плоскости (x_0, y_0) , получаем:

$$C = y_0^2 - 2\varepsilon x_0 - 2\varepsilon_m \cos x_0, \\ y^2 = y_0^2 + 2\varepsilon(x - x_0) + 2\varepsilon_m(\cos x - \cos x_0)$$

и уравнение фазовой траектории:

$$y = \pm \sqrt{y_0^2 + 2\varepsilon(x - x_0) + 2\varepsilon_m(\cos x - \cos x_0)}. \quad (28)$$

Очевидно, что «+» в формуле (28) соответствует $y_0 > 0$, а «-» — $y_0 < 0$. В случае же $y_0 = 0$ «+» соответствует направлению траекторий вверх, а «-» — направлению ее вниз. Направление же траектории при $y_0 = 0$ определяется знаком dy/dt , найти который можно по выражению

$$dy/dt = \varepsilon - \varepsilon_m \sin x. \quad (29)$$

Анализ фазового портрета (рис. 5) показывает, что колебательный равноускоренный разгон СД с ускорением $\varepsilon < \varepsilon_{пр}$ возможен только при начальных условиях, соответствующих точкам, лежащим в области фазовой плоскости, которая содержит начало координат $(x = 0, y = 0)$ и ограничена устойчивым и неустойчивым «усами», образующими замкнутую кривую, проходящую через «седло» $(x = \pi - \arcsin(\varepsilon/\varepsilon_m), y = 0)$. Любым начальным условиям, представленным внутренней точкой этой области, соответствует замкнутая, подобная эллипсу фазовая траектория с центром $x = x_{ц} - \arcsin(\varepsilon/\varepsilon_m), y = y_{ц} = 0$.

При увеличении ускорения ε сокращается область допустимых начальных условий. При $\varepsilon_{пр} < \varepsilon < \varepsilon_m$ эта область уже не содержит начало координат. Ее граница по-прежнему представляет собой замкнутую фазовую траекторию, образованную устойчивым «усом», входящим в «седло», и неустойчивым «усом», исходящим из «седла». Описание границы легко получить, подставив в формулу (28) $y_0 = 0, x_0 = \pi - x_{ц}, x_0 = \pi - x_{ц}, x_{ц} = \arcsin(\varepsilon/\varepsilon_m)$, что дает

$$\frac{y}{\sqrt{\varepsilon_m}} = \\ = \pm \sqrt{2 \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} (x - \pi + x_{ц}) + \cos x + \cos x_{ц} \right]}, \\ x_{\min} < x < \pi - x_{ц}, \quad (30)$$

где x_{\min} — корень нелинейного уравнения

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right) x + \cos x - \varepsilon/\varepsilon_m (\pi - x_{ц}) + \cos x_{ц} = 0. \quad (31)$$

На рис. 6 представлена область допустимых начальных условий для $\varepsilon/\varepsilon_m = 0,9$, построенная по выражению (30).

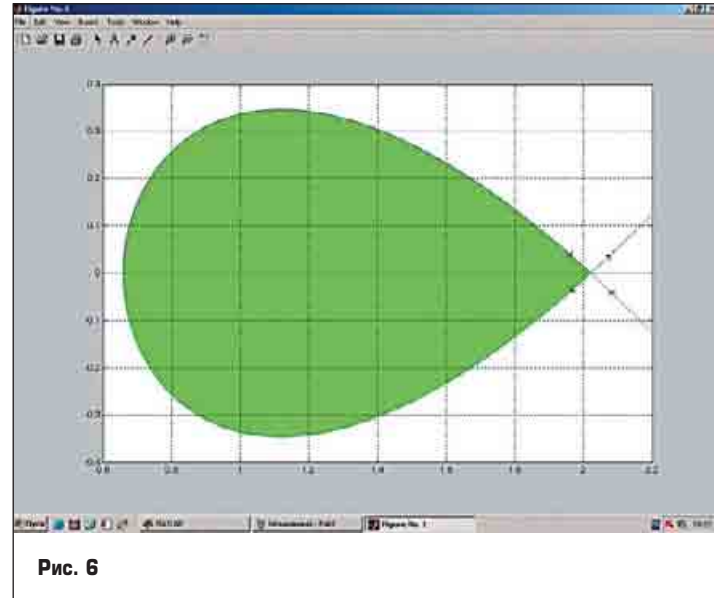


Рис. 6

Очевидно, что при $\varepsilon/\varepsilon_m \rightarrow 1$ область допустимых начальных условий представляет собой область, стягивающуюся в точку с координатами $(x = \pi/2, y = 0)$.

В случае начальных условий, не принадлежащих допустимой области, синхронный разгон СД невозможен. В этом случае отставание ротора от поля и скорость его нарастания неограниченно возрастают. Синхронизация при отставании ротора от поля статора на $2\pi n$ эл.рад (n — целое число) произойти не может, поскольку область устойчивости равноускоренного разгона ограничена неустойчивой фазовой траекторией, к которой фазовые траектории не приближаются ни внутри области устойчивости, ни снаружи. При наличии информации о текущем положении и скорости ротора синхронизацию можно восстановить, установив положение и скорость поля статора такими, чтобы изображающая точка на фазовой плоскости попала в область устойчивости.

В процессе синхронного равноускоренного пуска изображающая точка движется по замкнутой траектории, лежащей внутри области допустимых начальных условий. Если действующие на СД возмущения не выводят изображающую точку из этой области, синхронный равноускоренный пуск продолжается. В противном случае СД выпадает из синхронизма, то есть отставание ротора от поля и скорость его роста начинают неограниченно возрастать.

3. Пуск СД при постоянном реактивном моменте нагрузки ($M_n = \text{const}$)

В этом случае уравнение (2) можно записать в виде

$$d^2\zeta/dt^2 = \varepsilon_m \sin(\xi - \zeta) - \varepsilon_n, \quad (32)$$

где $\varepsilon_n = pM_n/J$ — ускорение в эл.рад/с², создаваемое моментом нагрузки.

С учетом обозначений (12) уравнение (32) можно записать в аналогичном (19) виде

$$d^2x/dt^2 = -\varepsilon_m \sin x + \varepsilon_n + \varepsilon$$

$$y = \pm \sqrt{y^2(0) + 2(\epsilon + \epsilon_n)(x - x(0)) + 2\epsilon_m(\cos x - \cos x(0))}, \quad (36)$$

или

$$y(dy/dx) = -\epsilon_m \sin x + \epsilon_n + \epsilon. \quad (33)$$

Интегрирование дифференциального уравнения (33) дает

$$y^2 = 2\epsilon_m \cos x + 2(\epsilon + \epsilon_n)x + C, \quad (34)$$

где постоянная интегрирования C , определяемая из начальных условий, имеет значение

$$C = y^2(0) - 2\epsilon_m \cos x(0) - 2(\epsilon + \epsilon_n)x(0). \quad (35)$$

Из выражений (34) и (35) получаем уравнение фазовых траекторий (36), аналогичное уравнению (28).

Сравнение (28) и (35) показывает, что фазовые траектории пуска СД с ускорением ϵ при постоянном моменте нагрузки совпадают с фазовыми траекториями пуска СД на холостом ходе при ускорении, равном $\epsilon + \epsilon_n$, и одинаковых начальных условиях.

Следовательно, область допустимых начальных условий при пуске с ускорением ϵ и постоянном реактивном моменте нагрузки соответствует области допустимых начальных условий при пуске на холостом ходе с ускорением, большим на величину ϵ_n . Таким образом, при пуске с постоянным ускорением область допустимых начальных условий с увеличением реактивного момента нагрузки уменьшается.

Пуск СД как на холостом ходе, так и при постоянной нагрузке сопровождается в общем случае колебаниями ротора, которые можно исключить, обеспечив начальные условия: $x(0) = x_n = \arcsin(\epsilon/\epsilon_m)$, $y(0) = 0$ на холостом ходе и $x(0) = x_n = \arcsin((\epsilon + \epsilon_n)/\epsilon_m)$, $y(0) = 0$ при постоянном моменте нагрузки. Однако по окончании разгона (при достижении заданной скорости вращения ротора) и прекращении роста частоты тока статора СД также возникают колебания ротора, вызванные отставанием ротора от поля статора.

Действительно, если в момент окончания разгона рост частоты прекращается скачком, то уравнение фазовых траекторий изменяется. Вместо уравнений

$$x = x_n = \arcsin(\epsilon/\epsilon_m), y = 0$$

при разгоне на холостом ходе и

$$x = x_n = \arcsin((\epsilon + \epsilon_n)/\epsilon_m), y = 0$$

при разгоне с постоянным моментом нагрузки получаем согласно (28) и (36) соответственно

$$y = \pm \sqrt{2\epsilon_m(\cos x - \cos x_n)} \quad (37)$$

и

$$y = \pm \sqrt{2\epsilon_n(x - x_n) + 2\epsilon_m(\cos x - \cos x_n)}. \quad (38)$$

Из выражения (37) видно, что колебания ротора при нулевом моменте нагрузки будут происходить вокруг угла поворота поля ста-

тора с амплитудой $x_n = \arcsin(\epsilon/\epsilon_m)$. При $x = 0$ y принимает максимальное по модулю значение

$$y_m = \pm \sqrt{2\epsilon_m(1 - \cos x_n)} = 2\sqrt{\epsilon_m} \sin \frac{x_n}{2}. \quad (39)$$

Фазовая траектория в этом случае — симметричная замкнутая кривая, подобная эллипсу, с центром в начале координат.

В случае постоянного момента нагрузки колебания будут происходить вокруг угла, смещенного относительно угла поворота поля статора на угол $x'_n = \arcsin \epsilon_n/\epsilon_m$. Фазовая траектория — замкнутая, но симметричная только относительно оси x кривая. Предельные значения x : x_{\min} и x_{\max} — корни уравнения

$$\cos x - \cos x + (\epsilon_n/\epsilon_m)(x - x_n) = 0, \quad (40)$$

а амплитудное значение y

$$y_m = \sqrt{2\epsilon_n(x'_n - x_n) + 2\epsilon_m(\cos x'_n - \cos x_n)}. \quad (41)$$

Если возможно скачкообразное изменение положения поля статора, то колебания при переходе в режим вращения с постоянной скоростью можно исключить. Для этого достаточно в момент достижения заданной скорости вращения ротора и прекращения роста частоты совместить угол поворота поля статора с углом поворота ротора при отсутствии момента нагрузки. При постоянном и отличном от нуля моменте нагрузки достаточно установить поле статора в положение, опережающее ротор на угол $x'_n = \arcsin \epsilon_n/\epsilon_m$.

4. Пуск СД при вентиляторной нагрузке

При вентиляторном характере нагрузки (3) уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \epsilon_m \sin(\xi - \zeta) - k_c \frac{d\zeta}{dt} \left| \frac{d\zeta}{dt} \right|, \quad (42)$$

где $k_c = k_v/pJ$ — безразмерный коэффициент.

При сохранении направления вращения можно просто полагать момент нагрузки пропорциональным квадрату скорости вращения ротора СД и записать уравнение (42) в виде

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \epsilon_m \sin(\xi - \zeta) - k_c \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2. \quad (42a)$$

Переход при условии (7) к фазовым координатам x, y (12) дает уравнение с переменными (зависящими от t) коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= y \frac{dy}{dx} = \\ &= -\epsilon_m \sin x + \epsilon + k_c (\epsilon t - y) |\epsilon t - y|, \\ y &= \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, фазовые траектории на плоскости (x, y) оказываются нестационарными, что существенно затрудняет анализ процесса.

В первом приближении при относительно медленном разгоне можно положить, что за период колебаний СД скорость вращения поля (ϵt) изменяется незначительно. Это позволяет построить стационарные фазовые траектории, зависящие от t как от параметра.

Записав дифференциальное уравнение фазовой траектории в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\epsilon_m \sin x + \epsilon + k_c(\Omega - y)|\Omega - y|}{y}, \quad \Omega = \epsilon t, \quad (44)$$

находим две особые точки фазовой плоскости:

$$x_1 = \arcsin \frac{\epsilon + k_c \Omega^2}{\epsilon_m} < \frac{\pi}{2}, y = 0 \quad (45)$$

и

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{\epsilon + k_c \Omega^2}{\epsilon_m} = \pi - x_1, y = 0. \quad (46)$$

Можно показать, что первая особая точка — устойчивый фокус, а вторая — «седло».

Исследование на модели при характерных значениях параметров: $\epsilon_m = 2900$, $\epsilon = 166$ эл.рад/с, $k_c = 6,25 \times 10^{-3}$ — позволило определить область допустимых отклонений от устойчивого положения равновесия (45) (устойчивого фокуса) и характер ее изменения в процессе разгона. Модель (рис. 7) построена в системе Matlab 6.5/Simulink 5 по системе уравнений

$$\begin{cases} dx/dt = y \\ dy/dt = -\epsilon_m \sin x + \epsilon + k_c(\Omega - y) |\Omega - y|, \end{cases}$$

полученной в результате представления дифференциального уравнения второго порядка (43) в виде системы двух уравнений первого порядка (в форме Коши). Результаты моделирования, наблюдаемые на графопостроителе XY Graph, показали, что область допустимых отклонений при фиксированной скорости ограничивается устойчивыми «усами», входящими в «седло». На рис. 8 и 9 построены области устойчивости фокуса (50) при $\Omega = \epsilon t$, равном 100 и 500 эл. рад/с. Из рис. 8 и 9 видно сужение области притяжения устойчивого фокуса (50) при увеличении $\Omega = \epsilon t$. Это следует также из формул (45) и (46), показывающих сближение особых точек (45) и (46) с ростом Ω . Вентиляторная нагрузка, как видно из рис. 8 и 9, проявляется в вытягивании области притяжения устойчивого фокуса (45) узкой криволинейной сужающейся полосой в направлении отрицательных значений y и положительных значений x . Физически это соответствует возможности согласования ротора с полем при значительном отставании ротора, имеющего существенно большую скорость, чем поле статора. Догоняя поле, ротор вследствие вентиляторной нагрузки тормозится, что и делает возможным согласование.

Результатом исследования на математической модели процесса равноускоренного разгона СД при $\epsilon = 136$, $\epsilon_m = 4350$ эл.рад/с, $k_c = 6,25 \times 10^{-3}$, нулевых НУ и скачкообразном сбросе ускорения на ноль в момент достижения заданной скорости СД $d\zeta/dt = 680$ эл.рад/с при $t_p = 5$ с представлены на рис. 10. Математическая модель, построенная в системе Matlab 6.5/

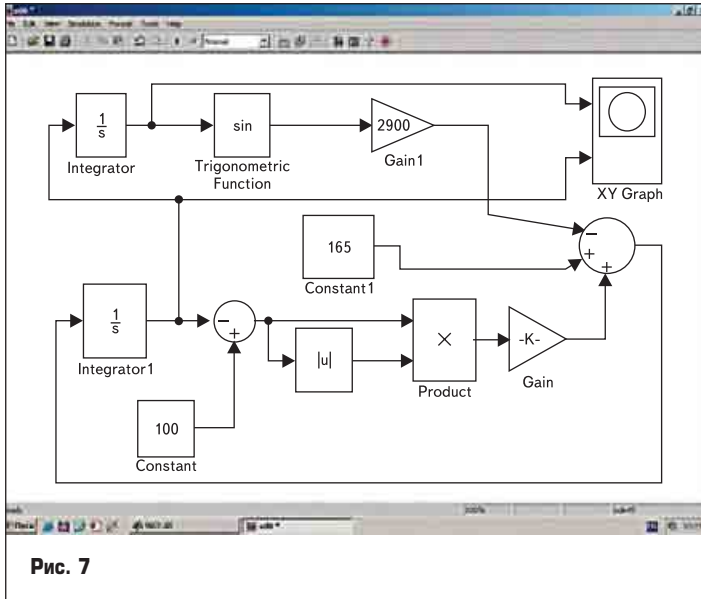


Рис. 7

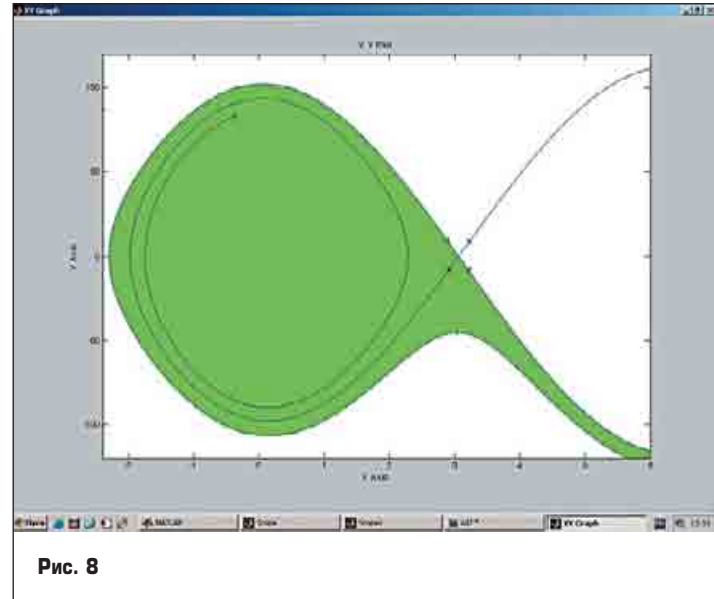


Рис. 8

Simulink 5, содержит модель равноускоренного вращения поля статора в течение $t_p = 5$ с при $\epsilon = 136$ эл.рад/с с последующим равномерным вращением со скоростью, достигнутой в конце разгона (680 эл.рад/с), а также модель СД, учитывающую синусоидальную зависимость синхронизирующего момента от разности углов поворота поля статора и ротора и тормозящий момент, пропорциональный квадрату скорости.

На экране Score2 представлен процесс изменения скорости ротора СД. Процесс изменения рассогласования поля статора и ротора представлен на экране Score1, а его производная (скорость изменения рассогласования) — на экране Score. Процесс, представленный на фазовой плоскости, изображен на экране XYGraph.

Нулевые НУ в начале разгона, согласно изложенному выше, вызывают колебательный процесс. В начале процесса амплитуда колебаний угла рассогласования составляет, судя по осциллограмме Score1, примерно 0,0313 эл.рад, а амплитуда колебаний скорости его изменения согласно осциллограмме Score1 — 2,062 эл.рад/с. Результаты хорошо согласуются с теоретическими. Действительно, учитывая $\epsilon/\epsilon_m = 136/4350 \approx 0,0313 \ll 1$, согласно (9), можно считать амплитуду колебаний рассогласования равной этому значению,

а амплитуду колебания — скорости его изменения, равной

$$\epsilon/\sqrt{\epsilon_m} = 136/\sqrt{4350} \approx 2,062 \text{ эл.рад/с.}$$

В процессе разгона колебания под действием момента трения, пропорционального квадрату скорости, к концу разгона практически полностью затухают. Однако в момент окончания разгона скорость вращения поля становится постоянной, а отставание ротора от поля скорости становится больше необходимого для создания синхронизирующего момента, уравновешивающего момент нагрузки, на величину, обеспечивавшую ускорение ротора. Кроме того, имеется небольшое различие скоростей ротора и поля статора. Все это создает ненулевые НУ для режима синхронного вращения ротора СД с постоянной скоростью. Это приводит к колебательному переходному режиму установления постоянной скорости вращения ротора, представленному на осциллограммах Score и Score1 на интервале времени от 5 до 6 с.

Возможность полного исключения сопровождающих разгон колебаний, отмеченную ранее, иллюстрирует рис. 11. В отличие от рассмотренного выше случая нулевых НУ пуск моделируется при начальном угле поворота статора

СД, равном 0,0312695 эл.рад, соответствующем абсциссе центра фазовых траекторий при пуске СД на холостом ходе. Благодаря правильно подобранному ненулевому НУ колебания на участке разгона СД ($0 < t < t_p = 5$ с) полностью исключены (см. осциллограммы Score и Score1).

При переходе в режим синхронного вращения с постоянной скоростью колебания также не возникают (промежуток времени от 5 до 6 с). Достигнуто это за счет уменьшения угла поворота поля статора на $\Delta\xi = 0,0425$ эл.рад и скорости вращения поля на $\Delta(d\xi/dt) = 0,3673$ эл.рад/с в момент окончания разгона СД ($t_p = 5$ с). Значение $\Delta\xi$ можно рассчитать по формуле.

$$\Delta\xi = \arcsin\left(\frac{\epsilon + k_c \Omega^2}{\epsilon_m}\right) - \arcsin\left(\frac{k_c \Omega^2}{\epsilon_m}\right), \quad (48)$$

где Ω — значение скорости ротора в конце разгона, которое меньше значения $\epsilon t_p = 680$ эл.рад/с на небольшую величину 0,3673 эл.рад/с, определенную моделированием.

Расчет по формуле (48) дает значение $\Delta\xi = 0,042613$ эл.рад/с, хорошо согласующееся с подобранным экспериментально значением $\Delta\xi = 0,0425$ эл.рад/с.

Изменение угла поворота поля статора на $\Delta\xi$ и его скорости вращения на $\Delta(d\xi/dt)$ в момент

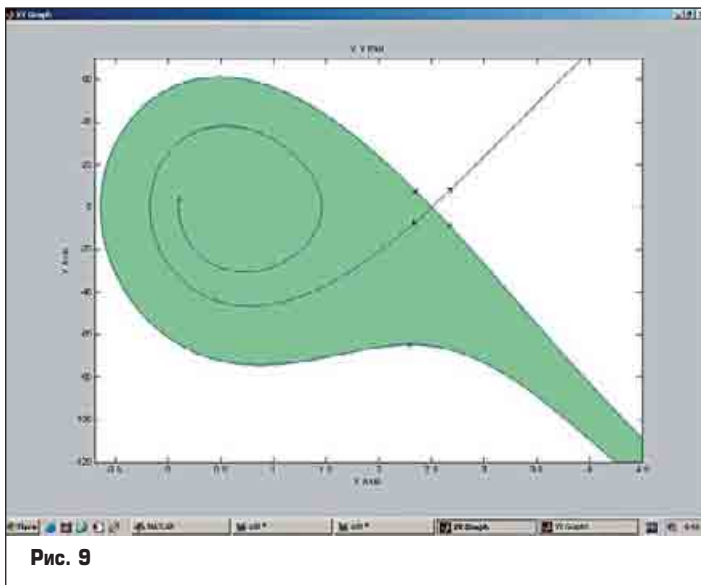


Рис. 9

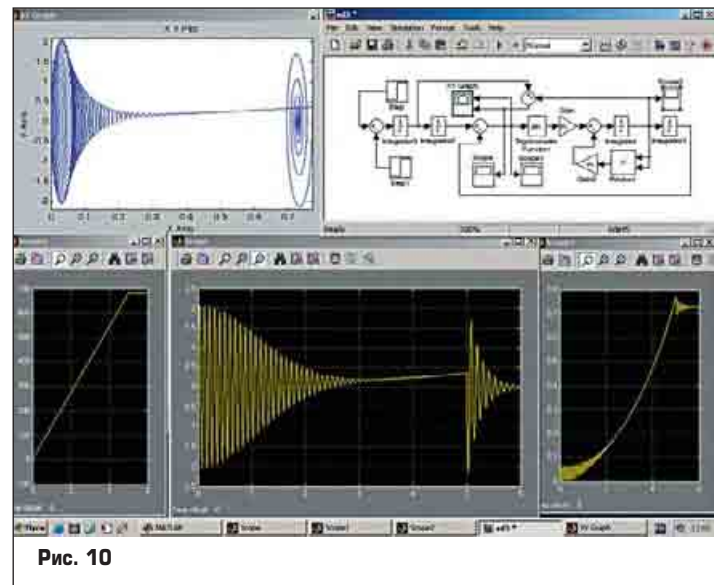


Рис. 10

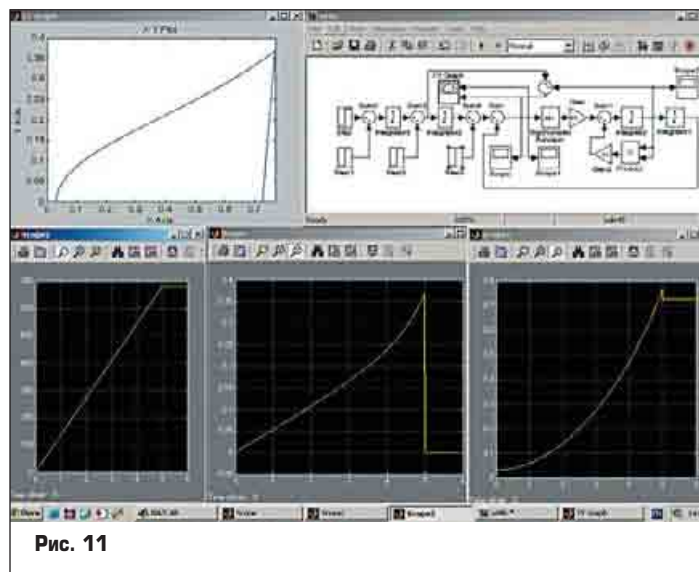


Рис. 11

окончания разгона осуществляют в модели (рис. 11) генераторы скачков Step2 и Step3 соответственно. Разумеется, в реальных условиях скачкообразное изменение угла поворота поля статора возможно лишь приближенно. Следовательно, реально можно существенно уменьшить колебания, а полностью исключить их можно только в идеализированной модели.

Выводы

1. Равноускоренный синхронный частотный пуск СД с постоянными магнитами на роторе возможен при сохранении положения точки, изображающей состояние двигателя на фазовой плоскости внутри области устойчивости режима равноускоренного разгона.
2. При пуске СД на холостом ходе на фазовой плоскости, по оси абсцисс которой откладывается отставание ротора от поля статора, область устойчивости ограничена фазовой траекторией, образованной устойчивым и неустойчивым «усами»: входящим и исходящим из особой точки — «седла». Внутри области устойчивости находится вторая особая точка — центр фазовых траекторий, соответствующих колебаниям СД, которые сопровождают равноускоренный разгон. В процессе разгона область устойчивости не изменяется. Большому ускорению разгона соответствует меньшая область устойчивости.
3. При холостом ходе пуск СД с нулевыми начальными условиями возможен с ускорением, не превышающим 72,46% от максимального ускорения СД. Пуск при начальном отставании ротора от поля статора на угол, обеспечивающий заданное ускорение, возможен при большем ускорении, приближающемся к максимальному ускорению СД.
4. В случае разгона с постоянным реактивным моментом нагрузки область устойчивости соответствует области устойчивости при разгоне на холостом ходе, но при ускорении, которое больше на величину, соответствующую моменту нагрузки. Область устойчивости в процессе разгона не изменяется.
5. При выпадении двигателя из синхронизма для его восстановления необходима информация о текущем положении и скорости ротора.
6. При вентиляторной нагрузке область устойчивости в процессе разгона сокращается.
7. Колебания ротора СД, сопровождающие его равноускоренный разгон и возникающие также после окончания разгона, можно существенно уменьшить за счет выбора соответствующих начальных условий при пуске и окончании разгона. Исключение колебаний уменьшает вероятность выпадения СД из синхронизма при возмущающих воздействиях.

Литература

1. Дробкин Б. З., Корзунов Е. А., Крутяков Е. А., Павлов П. А., Пронин М. В. Высоковольтные преобразователи частоты ОАО «Электросила» // Электротехника. 2003. № 5.
2. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1965.