

# Переходные процессы

## при включении трансформатора в сеть с синусоидальным напряжением

**В статье исследуются переходные процессы в трансформаторе при включении его в сеть с синусоидальным напряжением и даются рекомендации для разработчиков.**

**Сергей Котенев  
Андрей Евсеев,  
к. т. н.**

trans@tula.net

Хорошо известно, что при включении трансформатора в сеть (даже ненагруженного) возникает всплеск тока, который может превышать номинальный ток во много раз. Максимальный всплеск тока (будем называть далее «пусковой ток») необходимо учитывать при проектировании силовых трансформаторов, так как он оказывает силовое воздействие на обмотки трансформатора, а также приводит к ложному срабатыванию устройств защиты.

К сожалению, в литературе этот вопрос практически не рассматривался. В данной статье авторы попытались рассмотреть переходные процессы в трансформаторе и дать рекомендации по снижению пусковых токов. В дальнейшем все рассуждения будут вестись для ненагруженного трансформатора.

Для первичной обмотки однофазного трансформатора можно записать [1]:

$$ri(t) + \frac{d\Psi(t)}{dt} + L_p \frac{di(t)}{dt} = u(t), \quad (1)$$

где  $u(t)$  — мгновенное значение напряжения первичной обмотки;  $i(t)$  — мгновенное значение намагничивающего тока трансформатора;  $\Psi(t)$  — мгновенное значение потокосцепления;  $r$  — активное сопротивление обмотки;  $L_p$  — индуктивность рассеяния обмотки.

Учитывая, что у тороидальных трансформаторов индуктивность рассеяния обмотки достаточно мала, можно принять  $L_p = 0$ . Кроме этого, будем предполагать, что потокосцепление  $\Psi(t)$  в уравнении (1) зависит от тока. Эта зависимость задается кривой намагничивания и имеет нелинейный характер. На основании определения потокосцепления запишем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(t)}{dt} &= W \frac{d\Phi}{dt} = W \frac{SdB}{dt} = \\ &= WS \frac{dB}{dH} \frac{dH}{dt} = WS\mu(i) \frac{dH}{dt}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $W$  — количество витков первичной обмотки трансформатора;  $S$  — сечение магнитопровода трансформатора;  $\mu(i)$  — дифференциальная магнитная проницаемость. Для тороидального трансформатора по закону полного тока имеем:

$$H(t) = \frac{Wi(t)}{l}, \quad (3)$$

где  $l$  — длина средней магнитной линии. Если подставить (3) в (2) и в (1), то получим

$$L(i) \frac{di(t)}{dt} + ri(t) = u(t), \quad (4)$$

$$L(i) = \frac{W^2 S}{l} \frac{dB}{dH} = \frac{W^2 S \mu(i)}{l}, \quad (5)$$

где  $\mu(i)$  — дифференциальная магнитная проницаемость. Дифференциальное уравнение (4) является основным при анализе переходных процессов в трансформаторе. Как видно из этого уравнения, намагничивающий ток трансформатора имеет нелинейный характер. Анализ решения уравнения (4) невозможен без конкретной зависимости  $B = f(H)$ , которую необходимо получить экспериментально. В соответствии с ГОСТ 21427.1-83 была измерена индукция электротехнической стали 3413 в переменном магнитном поле и получена зависимость  $B = f(H)$ . Результаты приведены в таблице 1, а график показан на рис. 1.

На этом же рисунке показана кусочно-линейная аппроксимация кривой намагничивания двумя отрезками прямых, причем отрезки прямых выбираются так, чтобы они как можно ближе подходили к экспериментальным точкам. Тогда  $B = f(H)$  можно записать в виде функции

$$B(H) = \begin{cases} \frac{b}{h} H, & 0 < H < h \\ k(H-h) + b & h < H < \infty \end{cases}, \quad (6)$$

где  $h$  — напряженность магнитного поля в точке перегиба кривой намагничивания;  $b$  — индукция в точке перегиба на кривой намагничивания;  $k$  — коэффициент, характеризующий степень наклона участка насыщения к оси  $H$ . Из (6) легко получить выражение для дифференциальной магнитной проницаемости:

Таблица 1. Результаты анализа

<b>В, Тл</b>	0	0,04	0,11	0,24	0,34	0,50	0,62	0,75	0,90	1,06
<b>Н, А/м</b>	0	1,12	3,00	5,69	7,50	10,00	11,69	13,44	15,44	17,81
<b>В, Тл</b>	1,29	1,35	1,43	1,50	1,62	1,70	1,77	1,80	1,9	2,07
<b>Н, А/м</b>	21,56	22,63	24,13	26,13	30,69	39,19	55,63	121,25	3937,0	11357,0

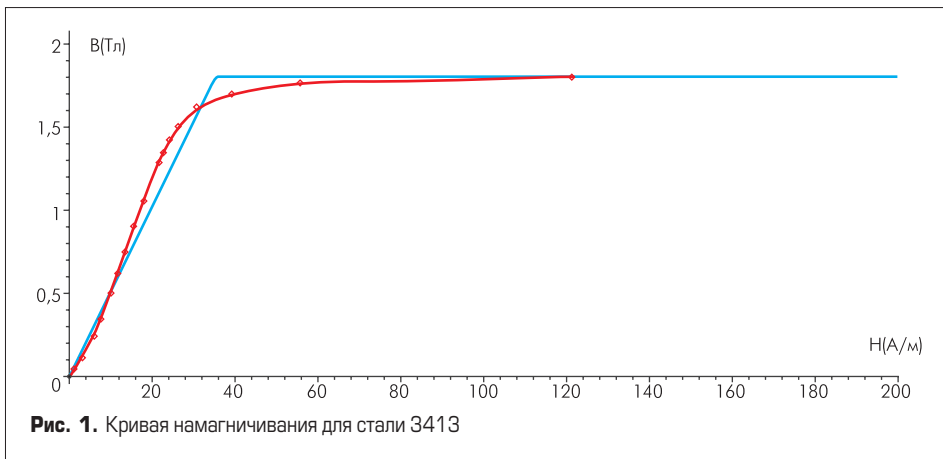


Рис. 1. Кривая намагничивания для стали 3413

$$\frac{dB}{dH} = \mu = \begin{cases} \mu_1 = \frac{b}{h}, & 0 < H < h \\ \mu_2 = k, & h < H < \infty \end{cases} \quad (7)$$

С учетом (7) дифференциальное уравнение (4) может быть представлено в виде двух уравнений для тока  $i_1(t)$ , соответствующего рабочему участку кривой намагничивания, и уравнения для тока  $i_2(t)$ , соответствующего участку насыщения:

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + ri_1(t) = u(t) \\ L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + ri_2(t) = u(t) \end{cases}, \quad (8)$$

$$\text{где } L_1 = \frac{WS^2\mu_1}{l} \text{ и } L_2 = \frac{WS^2\mu_2}{l}.$$

Дифференциальные уравнения (8) решаются при начальных условиях

$$i_1(0) = 0, \quad i_1(t_0) = i_2(t_0), \quad (9)$$

где  $t_0$  — момент времени, когда величина тока изменяется с  $i_1(t)$  на  $i_2(t)$ .

Пусть на первичную обмотку трансформатора подано синусоидальное напряжение  $u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $u_m$  — амплитудное значение напряжения;  $\omega$  — частота сети;  $\varphi$  — начальная фаза.

Так как в соответствии с законом электромагнитной индукции магнитный поток в сердечнике трансформатора отстает от напряжения  $u(t)$  на  $\pi/2$ , то максимальный всплеск тока возникает при  $\varphi = 0$ , и потому интерес представляет именно этот случай.

Решая дифференциальные уравнения (8) при  $\varphi = 0$ , получим:

$$i_1(t) = \frac{u_m \omega L_1}{x_1^2} e^{-\frac{rt}{L_1}} + \frac{u_m}{x_1} \sin(\omega t - \psi_1), \quad (10)$$

$$i_2(t) = \left[ i_0 - \frac{u_m}{x_2} \sin(\omega t_0 - \psi_2) \right] e^{-\frac{r(t-t_0)}{L_2}} + \frac{u_m}{x_2} \sin(\omega t - \psi_2), \quad (11)$$

$$\text{где } x_1 = \sqrt{r^2 + \omega^2 L_1^2}, \quad x_2 = \sqrt{r^2 + \omega^2 L_2^2}, \\ \cos \psi_1 = \frac{r}{x_1}, \quad \cos \psi_2 = \frac{r}{x_2}.$$

Момент времени  $t_0$  определяется как корень трансцендентного уравнения

$$i_1(t_0) = i_0 \quad (12)$$

при  $i_0 = hl/W$ . Выражения для токов (10) и (11) позволяют полностью рассчитать переходные токи в обмотке трансформатора при включении его в сеть с синусоидальным напряжением.

Для расчета был выбран трансформатор, намотанный на тороидальном магнитопроводе с размерами ОЛ100/180-60 мм. Этот трансформатор имеет первичную обмотку  $W = 275$  витков, площадь ядра  $S = 0,0024 \text{ м}^2$ , омическое сопротивление обмотки  $r = 0,4 \text{ Ом}$  и длину средней магнитной линии  $l = 0,44 \text{ м}$ . Из графика, изображенного на рис. 1, можно определить параметры  $h = 45,3 \text{ А/м}$  и  $b = 1,8 \text{ Тл}$ .

Для расчета тока было выбрано два метода. Это расчет по формулам (10), (11) и непосредственное решение дифференциального уравнения (4). Расчет тока по уравнению (4) имеет преимущество, так как здесь при построении решения используются все экспериментальные точки, и поэтому этот подход является более точным. Включение всех точек в расчет достигается за счет сплайн-аппроксимации экспериментальных данных. Однако этот метод имеет и недостаток, который заключается в том, что нельзя получить аналитическое выражение, а значит, и нельзя проанализировать полученный результат. Расчет же по формулам (10) и (11) позволяет провести анализ результата, но менее точный, так как эти формулы основаны на грубой аппроксимации кривой намагничивания.

Возвращаясь к решению (10) и (11), заметим, что несмотря на простоту формул, проводить по ним вычисление затруднительно. В связи с этим получим грубую оценку максимальных значений токов  $i_1$  и  $i_2$ . Максимальное значение  $i_1$  на рабочем участке достигается при таком  $t$ , которое является корнем уравнения

$$\cos(\omega t - \psi_1) = \frac{r}{x_1} e^{-\frac{rt}{L_1}}. \quad (13)$$

Приблизительно вычислить первый корень уравнения (13) можно следующим образом. Из таблицы 1 определяем дифференциальную магнитную проницаемость на рабочем участке кривой намагничивания

$$\mu_1 = \frac{b}{h} = \frac{1,8}{45,3} = 0,0398.$$

Замерить индукцию на участке насыщения очень трудно, так как пусковые токи для мощных трансформаторов составляют сотни ампер, и поэтому необходимо замерять индукцию именно при этих значениях токов. Поступим следующим образом. Экстраполируем участок, соответствующий большим значениям магнитного поля, прямой линией так, чтобы она явилась продолжением начального участка кривой намагничивания. Такую прямую можно построить, если выбрать  $\mu_2 = 0,0000164$ . Допустимость такой аппроксимации должны показать конкретные замеры пусковых токов и сравнения их с теоретическими вычислениями.

В большинстве практических случаев выполняется условие  $\omega L_1 \gg r$ , что дает:

$$\frac{r}{x_1} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L_1^2}} \approx \frac{r}{\omega L_1} \ll 1, \quad (14)$$

но  $\cos \psi_1 = r/x_1 \ll 1$ , тогда  $\psi_1 \approx \pi/2$ .

Из (13) следует, что  $\cos(\omega t - \psi_1) \approx 0$ , и тогда имеем  $\omega t - \psi_1 = \pi/2$ , откуда следует

$$t = \pi/\omega. \quad (15)$$

С учетом (15) из формулы (10) получим максимальное значение тока  $i_1$ :

$$i_{1\text{max}} = \frac{u_m}{\omega L_1} \left( 1 + e^{-\frac{r\pi}{\omega L_1}} \right) \approx \frac{2u_m}{\omega L_1}. \quad (16)$$

Второе слагаемое в (10) определяет установившееся значение тока. Его амплитудное значение будет равно:

$$i_{1\text{уст.}} = \max \left( \frac{u_m}{x_1} \sin(\omega t - \psi_1) \right) = \frac{u_m}{x_1} \approx \frac{u_m}{\omega L_1}. \quad (17)$$

Таким образом, на рабочем участке кривой намагничивания максимальное и установившееся значения токов отличаются в два раза. Дадим численную оценку установившегося значения тока:

$$i_{1\text{уст.}} = \frac{u_m}{\omega L_1} = \frac{u_m}{\omega} \frac{l}{W^2 S \mu_1} = \\ = \frac{220 \times \sqrt{2} \times 0,44}{314 \times 275^2 \times 0,0024 \times 0,0398} = 0,060 \text{ А}. \quad (18)$$

В соответствии с (16)  $i_{1\text{max}} = 2i_{1\text{уст.}} = 2 \times 0,060 = 0,120 \text{ А}$ . Для качественной оценки этой величины следует определить допустимое значение тока намагничивания. Допустимый ток ( $i_0$ ) вычисляется как ток, соответствующий точке перегиба на кривой намагничивания:

$$i_0 = \frac{Hl}{W} = \frac{45,3 \times 0,44}{275} = 0,0724 \text{ А}. \quad (19)$$

И если  $i_{1\text{max}} > i_0$ , то переходный процесс в трансформаторе будет протекать с большими токами.

Для вычисления пикового значения переходного тока необходимо найти магнитную индукцию для рабочего участка кривой намагничивания. Воспользуемся дифференциальным уравнением (1), переписав его в виде

$$WS \frac{dB}{dt} + ri_1(t) = u(t). \quad (20)$$

Подставим в (20) выражение для тока из (10) и проинтегрируем. Тогда получим

$$B(t) = \frac{u_m \omega L_1^2}{WSx_1^2} e^{-\frac{rt}{L_1}} + \frac{u_m L_1}{WSx_1} \sin(\omega t - \psi_1). \quad (21)$$

Принимая во внимание условие  $\omega L_1 \gg r$  и рассуждения, сделанные при выводе соотношения (16), получим:

$$B_{\max} \approx \frac{2u_m}{WS\omega}. \quad (22)$$

Учитывая, что участок насыщения на кривой намагничивания достаточно линейный, на основании определения дифференциальной магнитной проницаемости можно записать:

$$\frac{\Delta B}{\Delta H} = \mu_2. \quad (23)$$

Выберем приращение для индукции и напряженности магнитного поля в виде

$$\Delta B = \frac{2u_m}{WS\omega} - b, \quad (24)$$

$$\Delta H = H - h. \quad (25)$$

Подставим значения из (24) и (25) в (23), получим:

$$H = h + \frac{2u_m}{WS\omega\mu_2} - \frac{b}{\mu_2}. \quad (26)$$

На участке насыщения кривой намагничивания для напряженности магнитного поля имеем  $H = Wi_2/l$ , а на рабочем участке —  $b = h\mu_1$ . Подставим последние выражения в (26). В результате элементарных преобразований будем иметь:

$$i_2 = \frac{l}{W\mu_2} \left[ \frac{2u_m}{WS\omega} - h(\mu_1 - \mu_2) \right]. \quad (27)$$

Полученное выражение для тока  $i_2$  позволяет грубо оценить пиковое значение переходного тока трансформатора при включении его в сеть с синусоидальным напряжением, когда фаза напряжения проходит через нуль (самый неблагоприятный случай). Анализируя зависимость (27), можно заметить, что на величину пускового тока наиболее сильное влияние оказывает количество витков первичной обмотки трансформатора. Увеличение сечения керна также приводит к уменьшению тока, но в меньшей степени. Еще в меньшей степени на пусковой ток влияет длина средней магнитной линии. Все это говорит о том, что на величину пускового тока можно влиять через эти параметры.

Следует заметить, что формула (27) записана для участка насыщения, на котором вы-

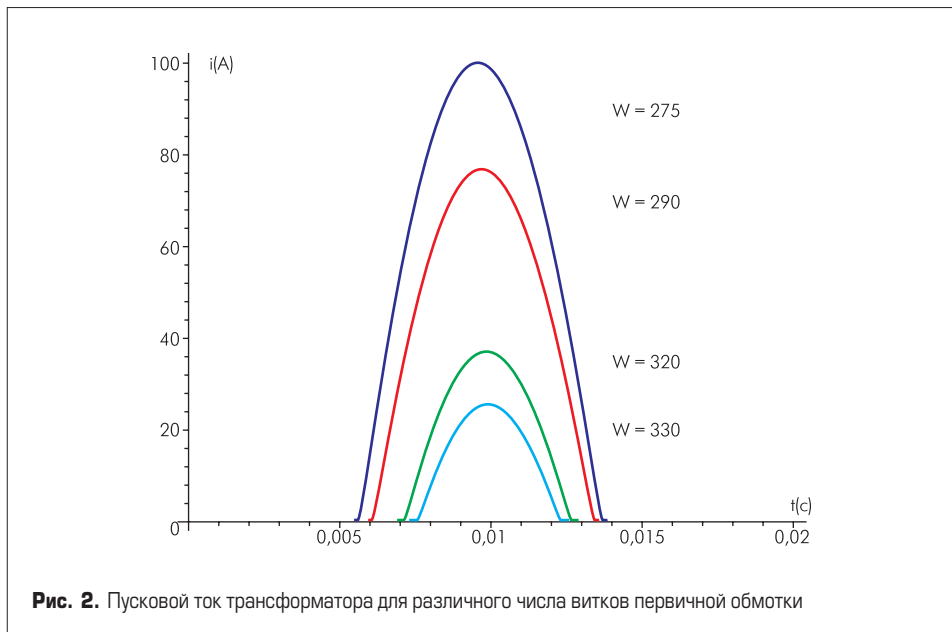


Рис. 2. Пусковой ток трансформатора для различного числа витков первичной обмотки

полняется неравенство  $B > b$ , и если оно нарушается, то можно получить отрицательные значения тока. Физически это будет означать, что пусковой ток трансформатора не превышает допустимый ток и поэтому весь переходный процесс укладывается на рабочем участке кривой намагничивания. Другими словами,  $i_2 = 0$ .

Для выбранного нами трансформатора рассчитаем пик пускового тока  $i_2$  по формуле (27):

$$i_2 = \frac{0,44}{275 \times 0,0000164} \left[ \frac{2 \times 220 \times \sqrt{2}}{275 \times 0,0024 \times 2 \times \pi \times 50} - 45,3 \times (0,0398 - 0,0000164) \right] = 116,9 \text{ A}. \quad (28)$$

Таким образом, при включении трансформатора в сеть может возникнуть всплеск тока более 100 ампер. Точный расчет токов по формулам (10) и (11) дает  $i_2 = 100$  А, что на 17% ниже. Это расхождение с точным расчетом будет тем меньше, чем сильнее выполняется неравенство  $\omega L_2 \gg r$ , но для грубой оценки этого вполне достаточно.

Сравнение расчетов токов по формулам (10), (11) и расчета этих же токов, но через дифференциальное уравнение (4) с использованием численных методов и слайд-ап-

проксимации кривой намагничивания, показало, что оба метода расчета дают очень близкий результат. В области больших токов результаты вычисления обеими методами практически совпадают. В области малых токов есть расхождения, которые связаны с неточным воспроизведением формы намагнивающего тока. Это расхождение определяется отклонением начального участка кривой намагничивания от прямой линии. Таким образом, можно с успехом использовать оба метода расчета.

Ниже произведены расчеты переходных процессов в трансформаторах с различным числом витков. Расчеты произведены через решение дифференциального уравнения (4) с использованием численного метода Рунге-Кутты 4–5-го порядка.

Из графика на рис. 2 видно, что трансформатор с первичной обмоткой в 275 витков имеет пусковой ток около 100 А. На этом же рисунке можно проследить, как влияет изменение количества витков первичной обмотки на пусковой ток.

Кривая тока переходного процесса представлена на рис. 3. Из данного графика видно, что максимальный ток достигает 100 А. Этот же график позволяет оценить и постоянную времени переходного процесса.

На рис. 4 представлен график установившегося тока. Установившийся ток рассчитан для

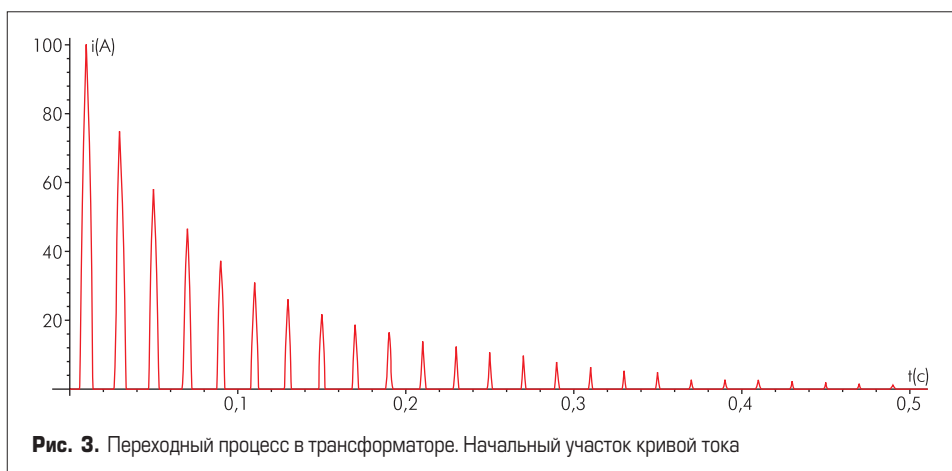


Рис. 3. Переходный процесс в трансформаторе. Начальный участок кривой тока

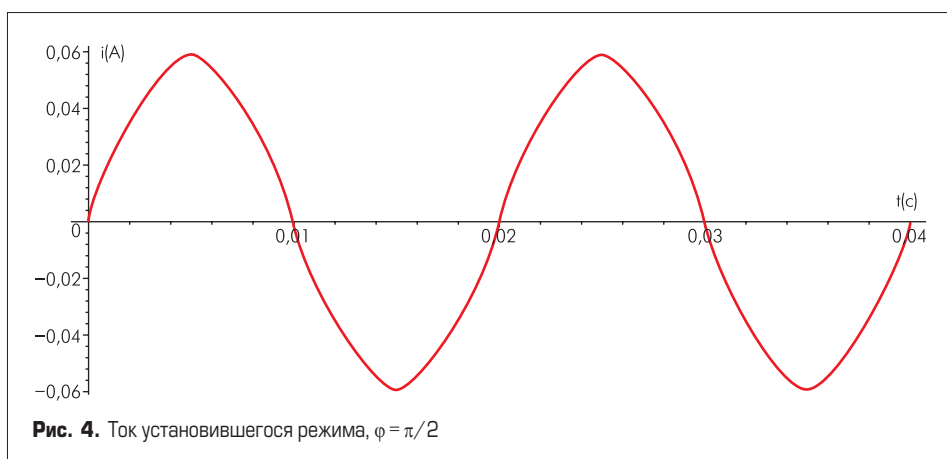


Таблица 2. Результаты испытаний

Сердечник	Число витков	Сопротивление обмотки, Ом	Ток, А (численный метод)	Ток, А (по формуле (27))	Ток, А (замерено)
ОЛ120/200-80	206	0,2	160	179	130
ОЛ120/200-80	412	0,4	0,043	—	—
ОЛ120/200-60	268	0,3	126	146	103
ОЛ100/180-80	206	0,26	135	156	133
ОЛ100/160-100	220	0,3	120	135	103
ОЛ80/140-80	275	0,8	73	91	80
ОЛ70/130-60	367	1,5	47	62	40
ОЛ70/120-40	660	3,4	24	33	23

случая, когда начальная фаза сети равна  $\pi/2$ . В этом случае включение трансформатора проходит без переходных процессов, что вид-

но из рис. 4. На этом же рисунке просматривается нелинейный характер тока намагничивания.

Для подтверждения теоретических вычислений проводились испытания с несколькими трансформаторами. Включение трансформаторов проводилось на напряжение 220 В при нулевой фазе. Результаты испытаний приводятся в таблице 2.

### Основные выводы

1. Увеличение числа витков и сечения сердечника магнитопровода приводит к снижению пускового тока трансформатора. Увеличение числа витков вдвое уменьшает пусковой ток до величины, не превышающей номинальное значение тока холостого хода. Однако указанные меры приводят к увеличению потерь в проводах обмоток и стали сердечника, а также к увеличению массогабаритных показателей трансформатора и его стоимости.
2. Наиболее эффективным способом уменьшения пускового тока является обеспечение подключения трансформатора к питающей сети в момент достижения максимального мгновенного значения напряжения, то есть при  $\varphi = \pi/2$ .

### Литература

1. Касаткин А. С., Немцов М. В. Электротехника. М.: Высшая школа, 2000.